目　　录

数学是科学的大门和钥匙.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学,你感到高中阶段的学习生活有趣吗？

我们知道,数学与生活紧密相连. 数学可以帮助我们认识世界,改造世界,创造新的生活. 数学是高中阶段的重要学科,不仅是学习物理、化学等学科的基础,而且对我们的终身发展有较大的影响.

面对实际问题,我们要认真观察、实验、归纳,大胆提出猜想. 为了证实或推翻提出的猜想,我们要通过分析,概括、抽象出数学概念,通过探究、推理,建立数学理论. 我们要积极地运用这些理论去解决问题. 在探究与应用过程中,我们的思维水平会不断提高,我们的创造能力会得到发展. 在数学学习过程中,我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要,本书提供了较大的选择空间.

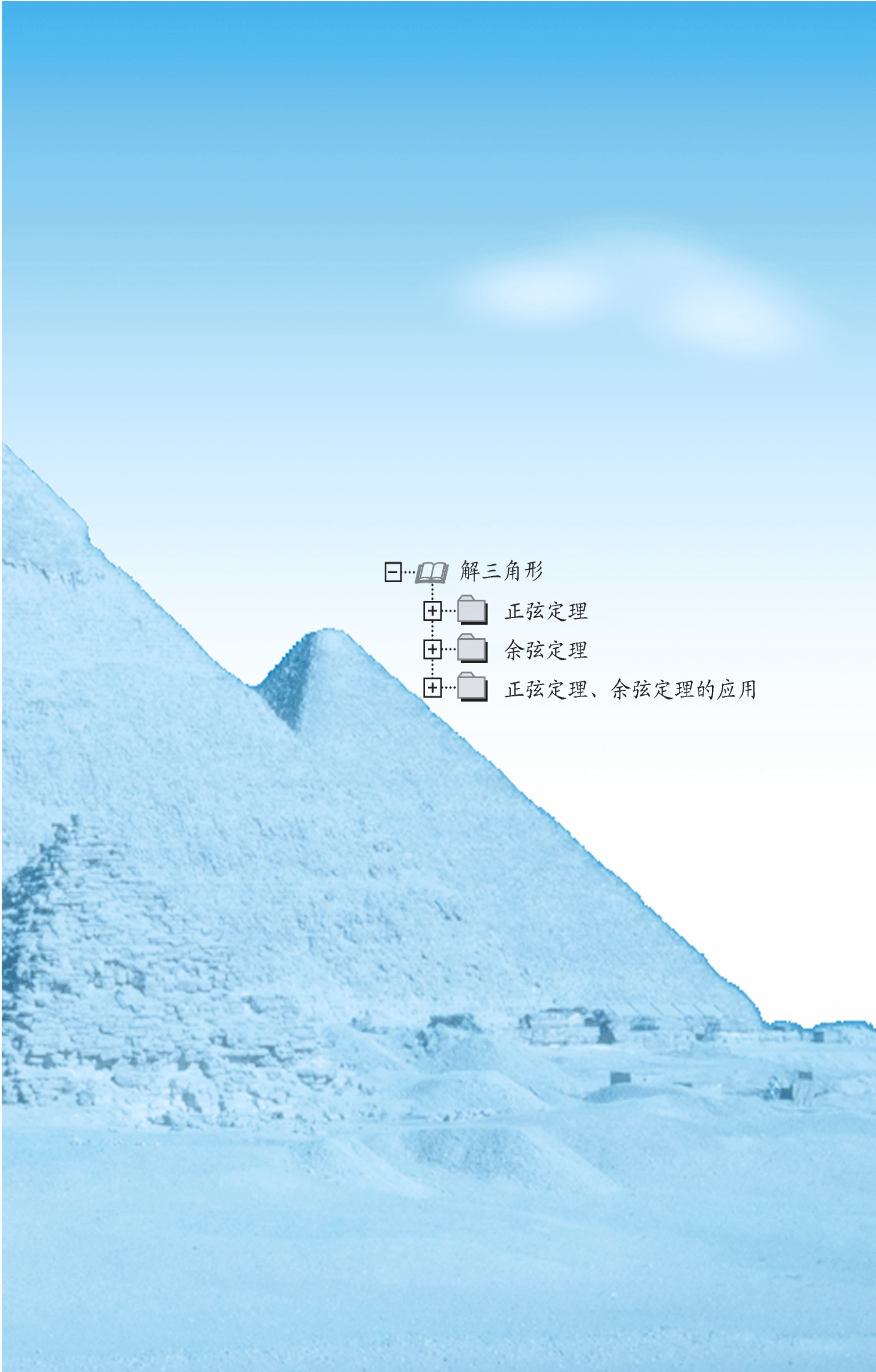
书中的引言、正文、练习、习题中的"感受・理解"部分、阅读、回顾等内容构成一个完整的体系. 它体现了教材的基本要求,是所有学生应当掌握的内容. 相信你一定能学好这部分内容.

本书还设计了一些具有挑战性的内容,包括思考、探究、链接,以及习题中的"思考・运用"、"探究・拓展"等,以激发你探索数学的兴趣. 在掌握基本内容之后,选择其中一些内容作思考与探究,你会更加喜欢数学.

本书部分常用符号

$\sin A$	角 A 的正弦
$\cos A$	角 A 的余弦
$\boldsymbol{a}$	向量 $\boldsymbol{a}$
$\mathbf{0}$	零向量
$\overrightarrow{AB}$	起点为 A、终点为 B 的向量
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	向量$\overrightarrow{AB}$的模（或长度）
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$	向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的数量积
$S_{\triangle ABC}$	$\triangle ABC$ 的面积
a_n	数列$\{a_n\}$的第 n 项
S_n	数列的前 n 项和
$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{N}^*$	正整数集
$\varnothing$	空集
$\mathbf{R}$	实数集

第 11 章　解三角形



解三角形

对自然界的深刻研究是数学发现的最丰富的来源.

——傅里叶

从金字塔的建造到尼罗河两岸的土地丈量，从大禹治水到都江堰的修建，从天文观测到精密仪器的制造……人们都离不开对几何图形的测量、设计和计算.

例如，测量河流两岸码头之间的距离，确定待建隧道的长度，计算卫星的角度与高度……

许多实际问题都可以转化为求三角形的边或角的问题. 我们已经知道直角三角形中的边角关系，那么，

- 任意三角形的边与角之间存在怎样的关系？
- 如何利用这些关系解决实际问题？

11.1 正弦定理

为了探索任意三角形中的边角关系，我们先回忆直角三角形中的边角关系.

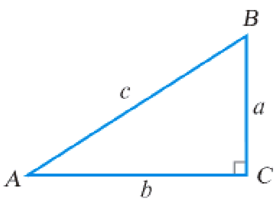


图 11－1－1

如图 11－1－1，在 Rt$\triangle ABC$ 中，我们有

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{b}{c},\ \sin C=1=\frac{c}{c}.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

● 上述结论，对任意三角形也成立吗？

如图 11－1－2 所示，任意画一个三角形，然后测量此三角形三个内角的大小及三条边的长，再对每条边计算其长度与它的对角的正弦值之比，三个比值相等吗？改变三角形的形状再试一试.

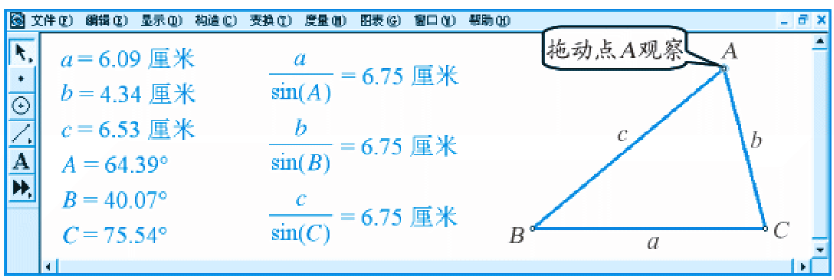


图 11－1－2

本章如无特别说明，a，b，c 分别表示 $\triangle ABC$ 中角 A，B，C 所对边的长.

于是我们猜想：对于任意三角形 ABC，都有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

即在一个三角形中，各边和它所对角的正弦之比相等.

我们可以通过下面的途径尝试证明上述结论：

（1）转化为直角三角形中的边角关系；

（2）建立直角坐标系，利用三角函数的定义；

（3）通过三角形的外接圆，将任意三角形问题转化为直角三角形问题；

（4）利用向量的投影或向量的数量积（产生三角函数）.

证法 1　不妨设$\angle C$ 为最大角.

（1）若$\angle C$ 为直角，我们已经证得结论成立.

(2) 若$\angle C$为锐角(图 11－1－3(1)),过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D,此时有

$$\sin B = \frac{AD}{c},\ \sin C = \frac{AD}{b},$$

所以 $c\sin B = b\sin C$,即

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

同理可得 $$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

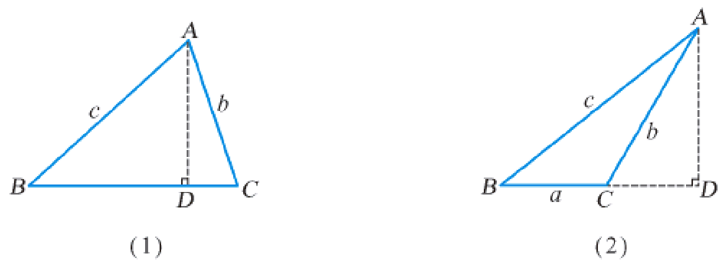


图 11－1－3

(3) 若$\angle C$为钝角(图 11－1－3(2)),过点 A 作 $AD \perp BC$,交 BC 的延长线于 D,此时也有

$$\sin B = \frac{AD}{c},$$

且

$$\sin C = \sin(180^\circ - C) = \frac{AD}{b}.$$

仿(2)可得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

由(1),(2),(3)知,结论成立.

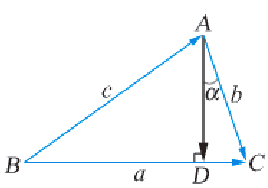


图 11－1－4

向量的数量积是将向量等式转化为数量等式的常用工具.

证法 2 在$\triangle ABC$中,有$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. 不妨设$\angle C$为最大角,过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D(图 11－1－4),于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

即

$$0 = |\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AD}|\cos(90^\circ + B) + |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\alpha,$$

其中,当$\angle C$为锐角或直角时,$\alpha = 90^\circ - C$;当$\angle C$为钝角时,$\alpha = C - 90^\circ$.

故可得

$$c\sin B - b\sin C = 0,$$

即

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

同理可得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

上述等式表明，三角形的各边和它所对角的正弦之比相等. 这样，我们得到**正弦定理**(sine theorem)：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

思　考

尝试用其他方法证明正弦定理.

例 1　如图 11－1－5，在△ABC 中，$A = 30°$，$C = 100°$，$a = 10$，求 b，c(精确到 0.01).

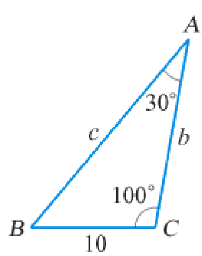


图 11－1－5

解　因为 $A = 30°$，$C = 100°$，所以 $B = 50°$.

因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$，所以

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{10\sin 50°}{\sin 30°} \approx 15.32,$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{10\sin 100°}{\sin 30°} \approx 19.70.$$

因此，b，c 的长分别为 15.32 和 19.70.

解斜三角形是指由六个元素（三条边和三个角）中的三个元素（至少有一个是边），求其余三个未知元素的过程.

例 2　根据下列条件解三角形(边长精确到 0.01，角度精确到0.1°)：

(1) $a = 16$，$b = 26$，$A = 30°$；

(2) $a = 30$，$b = 26$，$A = 30°$.

解　(1) 由正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

得

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{26\sin 30°}{16} = \frac{13}{16},$$

所以 $B_1 \approx 54.3°$，或 $B_2 = 180° - 54.3° = 125.7°$.

由于 $B_2 + A = 125.7° + 30° = 155.7° < 180°$，故 B_2 也符合要求. 从而 B 有两解(图 11－1－6)：

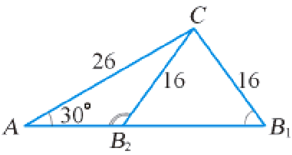


图 11－1－6

$$B_1 = 54.3°，或 B_2 = 125.7°.$$

当 $B_1 = 54.3°$ 时，

$$\begin{aligned} C_1 &= 180° - (A + B_1) = 180° - (30° + 54.3°) \\ &= 95.7°, \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{a\sin C_1}{\sin A} = \frac{16\sin 95.7°}{\sin 30°} \approx 31.84.$$

当 $B_2 = 125.7°$ 时，

$$\begin{aligned} C_2 &= 180° - (A + B_2) = 180° - (30° + 125.7°) \\ &= 24.3°, \end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{a\sin C_2}{\sin A} = \frac{16\sin 24.3°}{\sin 30°} \approx 13.17.$$

(2) 由正弦定理，得

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{26\sin 30°}{30} = \frac{13}{30},$$

所以 $B_1 = 25.7°$，或 $B_2 = 180° - 25.7° = 154.3°$.

由于 $B_2 + A = 154.3° + 30° = 184.3° > 180°$，故 B_2 不符合要求，从而 B 只有一解(图 11－1－7)，

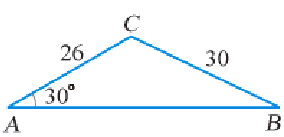


图 11－1－7

$$\begin{aligned} C &= 180° - (A + B) = 180° - (30° + 25.7°) \\ &= 124.3°, \end{aligned}$$

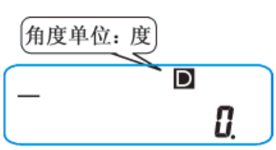
$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{30\sin 124.3°}{\sin 30°} \approx 49.57.$$

利用正弦定理，可以解决以下两类解斜三角形的问题：

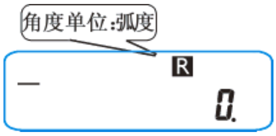
(1) 已知两角与任一边，求其他两边和一角；

(2) 已知两边与其中一边的对角，求另一边的对角(从而进一步求出其他的边和角).

CALCULATOR



(1) 在上面例 2(1)中，用计算器由 $\sin B = \dfrac{13}{16}$ 求锐角 B 时，要先确认角度的显示单位. 按 MODE MODE 1 键，以度为单位显示结果；按 MODE MODE 2 键，则以弧度为单位显示结果. 然后按 SHIFT $\sin^{-1}$ (1 3 ÷ 1 6) = 键，得锐角 B，这里的括号不能省.



(2) B 型函数(如 sin, cos, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, log, 10^x, $\sqrt{\ }$ 等)值的计算,应先按函数键再输入数值,且这类函数前的乘号可省,如计算 $\dfrac{16\sin 95.7^\circ}{\sin 30^\circ}$ 时,只需按 1 6 sin 9 5 . 7 ÷ sin 3 0 =.

练 习

1. 一个三角形的两个内角分别为 30° 和 45°,如果 45° 角所对的边长为 8,那么 30° 角所对边的长是( ).

   A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{6}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中,

   (1) 已知 $A=75^\circ$, $B=45^\circ$, $c=3\sqrt{2}$,求 a, b;

   (2) 已知 $A=30^\circ$, $B=120^\circ$, $b=12$,求 a, c.

3. 根据下列条件解三角形:

   (1) $b=40$, $c=20$, $C=25^\circ$;

   (2) $b=13$, $a=26$, $B=30^\circ$.

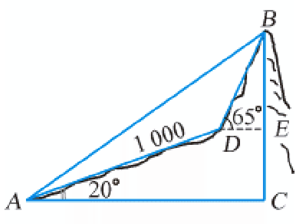


图 11-1-8

例 3 如图 11-1-8,某登山队在山脚 A 处测得山顶 B 的仰角为 35°,沿倾斜角为 20° 的斜坡前进 1 000 m 后到达 D 处,又测得山顶的仰角为 65°,求山的高度 BC(精确到 1 m).

分析 要求 BC,只要求 AB,为此考虑解 $\triangle ABD$.

解 过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于 E,因为 $\angle DAC=20^\circ$,所以 $\angle ADE=160^\circ$,于是

$$\angle ADB=360^\circ-160^\circ-65^\circ=135^\circ.$$

又 $\angle BAD=35^\circ-20^\circ=15^\circ$,所以 $\angle ABD=30^\circ$.

在 $\triangle ABD$ 中,由正弦定理,得

$$AB=\frac{AD\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD}=\frac{1\,000\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ}=1\,000\sqrt{2}(\mathrm{m}).$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$BC=AB\sin 35^\circ=1\,000\sqrt{2}\sin 35^\circ\approx 811(\mathrm{m}).$$

答 山的高度约为 811 m.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解 令 $\dfrac{a}{\sin A}=k$,由正弦定理,得

$$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C.$$

代入已知条件，得

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C},$$

即

$$\tan A=\tan B=\tan C.$$

通过正弦定理，可以实现边角互化.

又 $A, B, C\in(0, \pi)$，所以 $A=B=C$，从而$\triangle ABC$ 为正三角形.

例 5 在$\triangle ABC$ 中，AD 是$\angle BAC$ 的平分线（图 11－1－9），用正弦定理证明

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

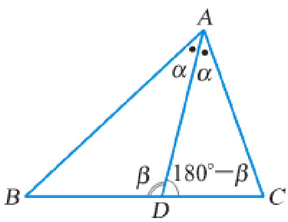


图 11－1－9

证 设$\angle BAD=\alpha$，$\angle BDA=\beta$，则$\angle CAD=\alpha$，$\angle CDA=180^\circ-\beta$. 在$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$ 中分别运用正弦定理，得

$$\frac{AB}{BD}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$\frac{AC}{DC}=\frac{\sin(180^\circ-\beta)}{\sin\alpha}.$$

又 $\sin(180^\circ-\beta)=\sin\beta$，所以

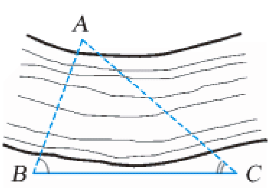
$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC},$$

即

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

练　习

1. 为了在一条河上建一座桥，施工前在河两岸打上两个桥位桩 A，B（如图）. 要测算出 A，B 两点间的距离，测量人员在岸边定出基线 BC，测得 $BC=78.35\ \text{m}$，$\angle B=69^\circ43'$，$\angle C=41^\circ12'$，试计算 AB 的长（精确到 0.01 m）.



（第 1 题）

2. 根据下列条件，判断$\triangle ABC$ 的形状：

（1）$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$；

（2）$a\cos A=b\cos B$.

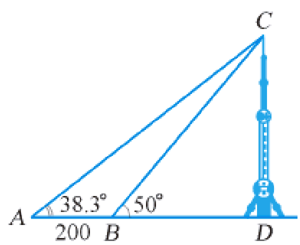
3. 在$\triangle ABC$ 中，若 $A=60^\circ$，$a=\sqrt{3}$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$ 等于（　　）.

A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

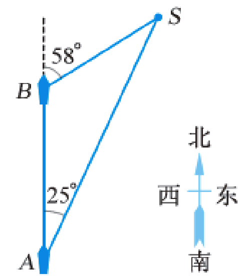
习题 11.1

感受·理解

1. 在$\triangle ABC$中,
(1) 已知 $A=135°$, $B=15°$, $c=1$,求这个三角形的最大边的长;
(2) 已知 $A=26°$, $C=47°$, $b=16$, 求 a, c, B.
2. 根据下列条件解三角形:
(1) $b=25$, $c=12$, $C=23°$;
(2) $b=47$, $c=38$, $C=110°$;
(3) $a=14$, $b=7\sqrt{6}$, $B=60°$.
3. 如图,从 A 点和 B 点测得上海东方明珠电视塔顶 C 的仰角分别为 38.3°和 50°, $AB=200$ m,求东方明珠电视塔的高度(精确到 1 m).



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 一艘船以 42 n mile/h 的速度向正北航行. 在 A 处看灯塔 S 在船的北偏东 25°, 30 min 后航行到 B 处,在 B 处看灯塔 S 在船的北偏东 58°. 求灯塔 S 与 B 之间的距离(精确到 0.1 n mile).
5. 在$\triangle ABC$中,
(1) 已知 $a\cos B=b\cos A$, 试判断$\triangle ABC$的形状;
(2) 已知 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{b}=\frac{\cos C}{c}$, 试判断$\triangle ABC$的形状.

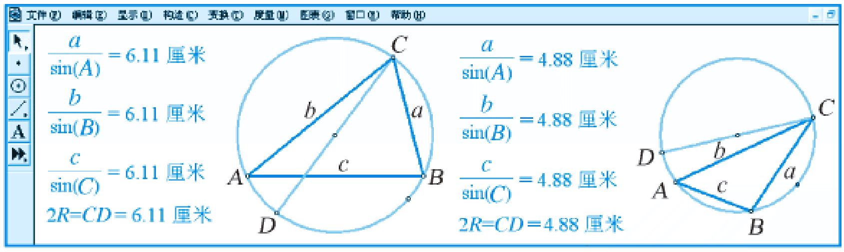
思考·运用

6. 已知$\triangle ABC$的两边 a, b 及夹角 C,仿照正弦定理的证法 1,证明 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$, 并运用这一结论解决下面的问题:
(1) 在$\triangle ABC$中,已知 $a=2$, $b=3$, $C=150°$,求 $S_{\triangle ABC}$;
(2) 在$\triangle ABC$中,已知 $c=10$, $A=45°$, $C=30°$, 求 b 和 $S_{\triangle ABC}$.
7. 在$\triangle ABC$中,设 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$. 已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$, 证明$\triangle ABC$为正三角形.
8. 在$\triangle ABC$中,$\angle A$ 的外角平分线交 BC 的延长线于 D,用正弦定理证明: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

探究·拓展

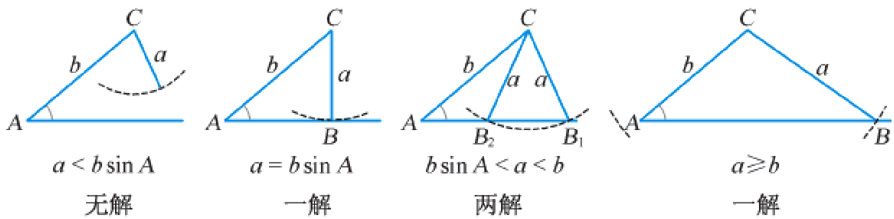
9. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,斜边 c 等于 Rt$\triangle ABC$ 外接圆的直径 $2R$,故有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$, 这一关系对任意三角形也成立吗(如图)?探索并证明你的

结论.



（第 9 题）

10. （阅读题）在已知两边 a，b 和一边的对角 A，求角 B 时，如果 A 为锐角，那么可能出现以下情况（如图）：



（第 10 题）

如果 A 为钝角，那么可能会出现哪几种情况？试画出草图加以说明.

11.2 余弦定理

在上节中，我们通过等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 的两边与$\overrightarrow{AD}$（AD 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高）作数量积，将向量等式转化为数量关系，进而推出了正弦定理.

● 还有其他途径将向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 数量化吗？

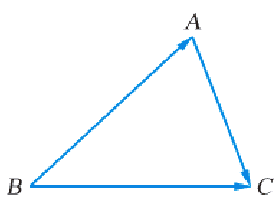


图 11-2-1

因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$（图 11-2-1），所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\\&=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\\&=|\overrightarrow{BA}|^2+2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}|\cos(180^\circ-A)+|\overrightarrow{AC}|^2\\&=c^2-2cb\cos A+b^2,\end{aligned}$$

即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

同理可得

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

上述等式表明，三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍. 这样，我们得到**余弦定理**(cosine theorem)：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

思　考

回顾正弦定理的证明，尝试用其他方法证明余弦定理.

余弦定理也可以写成如下形式：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

例 1 在$\triangle ABC$中，

(1) 已知 $b=3$，$c=1$，$A=60^\circ$，求 a；

(2) 已知 $a=4$，$b=5$，$c=6$，求 A（精确到 0.1°）.

解 (1) 由余弦定理，得

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= 3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos 60^\circ \\ &= 7, \end{aligned}$$

所以

$$a=\sqrt{7}.$$

(2) 由余弦定理，得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=0.75,$$

所以

$$A\approx 41.4^\circ.$$

例 2 A，B 两地之间隔着一个水塘（图 11－2－2），现选择另一点 C，测得 $CA=182\text{ m}$，$CB=126\text{ m}$，$\angle ACB=63^\circ$，求 A，B 两地之间的距离（精确到 1 m）.

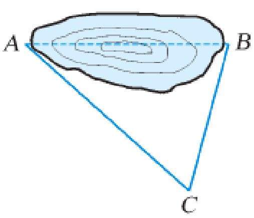


图 11－2－2

解 由余弦定理，得

$$\begin{aligned} AB^2 &= CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos C \\ &= 182^2+126^2-2\times182\times126\cos 63^\circ \\ &\approx 28\,178.18, \end{aligned}$$

所以 $AB\approx 168(\text{m})$.

答 A，B 两地之间的距离约为 168 m.

例 3 用余弦定理证明：在$\triangle ABC$中，当$\angle C$为锐角时，$a^2+b^2>c^2$；当$\angle C$为钝角时，$a^2+b^2<c^2$.

证 当$\angle C$为锐角时，$\cos C>0$，由余弦定理，得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C<a^2+b^2,$$

即

$$a^2+b^2>c^2.$$

同理可证，当$\angle C$为钝角时，$a^2+b^2<c^2$.

余弦定理可以看做是勾股定理的推广.

利用余弦定理，可以解决以下两类解斜三角形的问题：

(1) 已知三边，求三个角；

(2) 已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.

练 习

1. 在$\triangle ABC$中,
   (1) 已知$A=60^\circ$, $b=4$, $c=7$,求a;
   (2) 已知$a=7$, $b=5$, $c=3$, 求A.
2. 若三条线段的长为5, 6, 7,则用这三条线段(　　).
   A. 能组成直角三角形　　B. 能组成锐角三角形
   C. 能组成钝角三角形　　D. 不能组成三角形
3. 在$\triangle ABC$中,已知$a^2+b^2+ab=c^2$, 试求$\angle C$的大小.
4. 两游艇自某地同时出发,一艇以10 km/h的速度向正北行驶,另一艇以7 km/h的速度向北偏东45°的方向行驶,问:经过40 min,两艇相距多远?

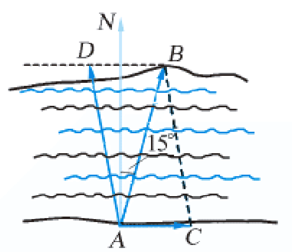


图11-2-3

例4 在长江某渡口处,江水以5 km/h的速度向东流. 一渡船在江南岸的A码头出发,预定要在0.1 h后到达江北岸B码头(图11-2-3). 设$\overrightarrow{AN}$为正北方向,已知B码头在A码头的北偏东15°,并与A码头相距1.2 km. 该渡船应按什么方向航行?速度是多少千米/小时?(角度精确到0.1°,速度精确到0.1 km/h)

解 如图11-2-3,取$\overrightarrow{AC}$方向为水流方向,以AC为一边、AB为对角线作平行四边形$ACBD$,其中

$$AB=1.2(\mathrm{km}),\ AC=5\times0.1=0.5(\mathrm{km}),$$

船按$\overrightarrow{AD}$方向开出.

在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得

与《数学4(必修)》第9章第2节的例2进行比较,两者有何异同?

$$BC^2=1.2^2+0.5^2-2\times1.2\times0.5\cos(90^\circ-15^\circ)\approx1.38,$$

所以

$$AD=BC\approx1.17(\mathrm{km}).$$

因此,船的航行速度为

$$1.17\div0.1=11.7(\mathrm{km/h}).$$

在$\triangle ABC$中,由正弦定理,得

$$\sin\angle ABC=\frac{AC\sin\angle BAC}{BC}=\frac{0.5\sin75^\circ}{1.17}\approx0.4128,$$

所以

$$\angle ABC\approx24.4^\circ.$$

所以　$\angle DAN=\angle DAB-\angle NAB=\angle ABC-15^\circ\approx9.4^\circ$.

答 渡船应按北偏西9.4°的方向,并以11.7 km/h的速度航行.

例5 在$\triangle ABC$中,已知$\sin A=2\sin B\cos C$, 试判断该三角形的形状.

解 由正弦定理及余弦定理,得

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

所以

$$\frac{a}{b}=2\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

整理,得

$$b^2=c^2.$$

因为 $b>0$, $c>0$,所以 $b=c$. 因此,$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

例 6 如图 11-2-4,AM 是$\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线,求证:

$$AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}.$$

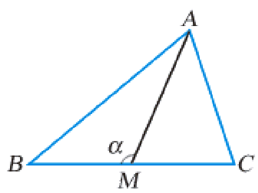


图 11-2-4

证 设 $\angle AMB=\alpha$,则 $\angle AMC=180^\circ-\alpha$.

在$\triangle ABM$ 中,由余弦定理,得

$$AB^2=AM^2+BM^2-2AM\cdot BM\cos\alpha.$$

在$\triangle ACM$ 中,由余弦定理,得

$$AC^2=AM^2+MC^2-2AM\cdot MC\cos(180^\circ-\alpha).$$

因为 $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$, $BM=MC=\frac{1}{2}BC$,

所以

$$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{1}{2}BC^2,$$

因此,

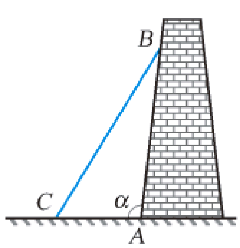
$$AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}.$$

练 习

1. 在$\triangle ABC$ 中,如果 $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$,那么 $\cos C$ 等于(　　).

   A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{4}$

2. 如图,长 7 m 的梯子 BC 靠在斜壁上,梯脚与壁基相距 1.5 m,梯顶在沿着壁向上 6 m 的地方,求壁面和地面所成的角 α(精确到 0.1°).



(第 2 题)

3. 在$\triangle ABC$ 中,已知 $a=2$, $b=3$, $C=60^\circ$,试证明此三角形为锐角三角形.

4. 在$\triangle ABC$ 中,设 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,且 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\sqrt{3}$,求 AB 的长.

习题 11.2

感受・理解

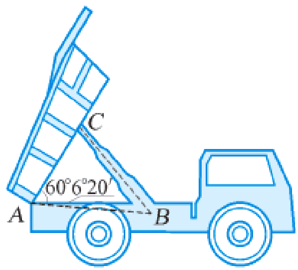
1. 在$\triangle ABC$ 中,

   (1) 已知 $a=24$, $b=13$, $C=108^\circ$,求 c, B;

   (2) 已知 $b=2$, $c=10$, $A=42^\circ$,求 a, B, C;

   (3) 已知 $a=7$, $b=4\sqrt{3}$, $c=\sqrt{13}$,求最小的内角.

2. 牵牛星和织女星分别距离地球约 17 光年和 26 光年，从地球上观测这两颗星的张角为 34°，求牵牛星与织女星之间的距离.
3. 在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB = 12\text{ cm}$，$BC = 10\text{ cm}$，$A = 60^\circ$，求平行四边形两条对角线的长.
4. 自动卸货汽车的车箱采用液压机构，设计时需要计算油泵顶杆 BC 的长度（如图）. 已知车箱的最大仰角为 60°，油泵顶点 B 与车箱支点 A 之间的距离为 1.95 m，AB 与水平线之间的夹角为 $6^\circ20'$，AC 长为 1.40 m，试计算 BC 的长（精确到 0.01 m）.



（第 4 题）

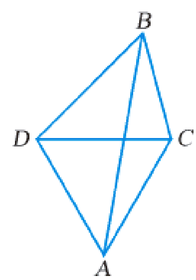
5. 在△ABC 中，已知 $c = 2a\cos B$，试判断△ABC 的形状.
6. 在△ABC 中，已知 $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$，求 A 的度数.
7. 用余弦定理证明：在△ABC 中，
   (1) $a = b\cos C + c\cos B$；
   (2) $b = c\cos A + a\cos C$；
   (3) $c = a\cos B + b\cos A$.

这三个关系式也称为射影定理.

8. 用余弦定理证明：平行四边形两对角线平方的和等于四边平方的和.

思考·运用

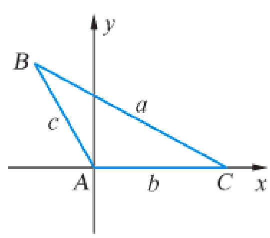
9. 试用向量方法证明第 7 题中的结论.
10. 在△ABC 中，已知 $2a = b + c$，$\sin^2 A = \sin B\sin C$，试判断△ABC 的形状.
11. 如图，我炮兵阵地位于 A 处，两观察所分别设于 C，D，已知△ACD 为边长等于 a 的正三角形. 当目标出现于 B 时，测得 $\angle CDB = 45^\circ$，$\angle BCD = 75^\circ$，试求炮击目标的距离 AB.



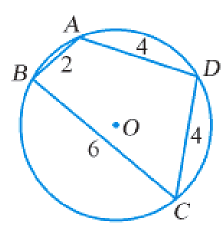
（第 11 题）

探究·拓展

12. 在△ABC 中，已知$\angle A$，$AC = b$，$AB = c$. 如图建立直角坐标系.
   (1) 利用两点间的距离公式计算 BC^2；
   (2) 证明 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A$，由此可证明正弦定理吗？



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 如图，已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB = 2$，$BC = 6$，$AD = CD = 4$，如何求出四边形 $ABCD$ 的面积？

11.3 正弦定理、余弦定理的应用

正弦定理、余弦定理体现了三角形中边角之间的相互关系，在测量学、运动学、力学、电学等许多领域有着广泛的应用.

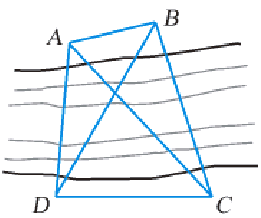


图 11－3－1

例 1 **如图** 11－3－1，**为了测量河对岸两点** A，B **之间的距离，在河岸这边取点** C，D，**测得** $\angle ADC=85^{\circ}$，$\angle BDC=60^{\circ}$，$\angle ACD=47^{\circ}$，$\angle BCD=72^{\circ}$，$CD=100$ m. **设** A，B，C，D **在同一平面内，试求** A，B **之间的距离（精确到** 1 m）.

解 **在**$\triangle ADC$ **中**，$\angle ADC=85^{\circ}$，$\angle ACD=47^{\circ}$，**则** $\angle DAC=48^{\circ}$. **又** $DC=100$，**由正弦定理，得**

$$AC=\frac{DC\sin\angle ADC}{\sin\angle DAC}=\frac{100\sin 85^{\circ}}{\sin 48^{\circ}}\approx 134.05(\text{m}).$$

在$\triangle BDC$ **中**，$\angle BDC=60^{\circ}$，$\angle BCD=72^{\circ}$，**则** $\angle DBC=48^{\circ}$. **又** $DC=100$，**由正弦定理，得**

$$BC=\frac{DC\sin\angle BDC}{\sin\angle DBC}=\frac{100\sin 60^{\circ}}{\sin 48^{\circ}}\approx 116.54(\text{m}).$$

在$\triangle ABC$ **中，由余弦定理，得**

$$\begin{aligned}AB^2&=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB\\&=134.05^2+116.54^2-2\times 134.05\times 116.54\cos 25^{\circ}\\&\approx 3\,233.95,\end{aligned}$$

所以 $AB\approx 57(\text{m})$.

答 A，B **两点之间的距离约为** 57 m.

例 2 **如图** 11－3－2，**某渔轮在航行中不幸遇险，发出呼救信号. 我海军舰艇在** A **处获悉后，测出该渔轮在方位角为** 45°，**距离为** 10 n mile **的**C **处，并测得渔轮正沿方位角为** 105°**的方向，以**9 n mile/h **的速度向小岛靠拢. 我海军舰艇立即以** 21 n mile/h **的速度前去营救. 求舰艇的航向和靠近渔轮所需的时间（角度精确到** 0.1°，**时间精确到** 1 min）.

方位角是从指北方向顺时针转到目标方向线的角.

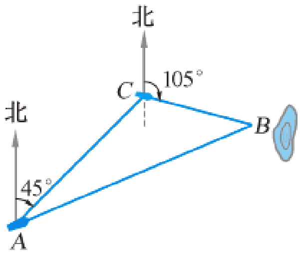


图 11－3－2

解 设舰艇收到信号后 x h 在 B 处靠拢渔轮，则 $AB=21x$，$BC=9x$，又 $AC=10$，$\angle ACB=45^\circ+(180^\circ-105^\circ)=120^\circ$.

由余弦定理，得

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB,$$

即

$$(21x)^2=10^2+(9x)^2-2\times10\times9x\cos120^\circ.$$

化简，得

$$36x^2-9x-10=0,$$

解得 $x=\frac{2}{3}(\mathrm{h})=40(\mathrm{min})$（负值舍去）.

由正弦定理，得

$$\sin\angle BAC=\frac{BC\sin\angle ACB}{AB}=\frac{9x\sin120^\circ}{21x}=\frac{3\sqrt{3}}{14},$$

所以 $\angle BAC\approx21.8^\circ$，方位角为 $45^\circ+21.8^\circ=66.8^\circ$.

答 舰艇应沿着方位角 66.8° 的方向航行，经过 40 min 就可靠近渔轮.

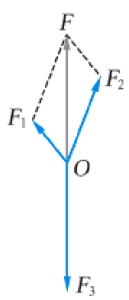


图 11－3－3

例 3 作用于同一点的三个力 F_1，F_2，F_3 平衡. 已知 $F_1=30$ N，$F_2=50$ N，F_1 与 F_2 之间的夹角是 60°，求 F_3 的大小与方向（精确到 0.1°）.

解 F_3 应和 F_1，F_2 的合力 F 平衡，所以 F_3 和 F 在同一直线上，并且大小相等，方向相反.

如图 11－3－3，在 $\triangle OF_1F$ 中，由余弦定理，得

$$F=\sqrt{30^2+50^2-2\times30\times50\cos120^\circ}=70(\mathrm{N}).$$

再由正弦定理，得

$$\sin\angle F_1OF=\frac{50\sin120^\circ}{70}=\frac{5\sqrt{3}}{14},$$

所以 $\angle F_1OF\approx38.2^\circ$，从而 $\angle F_1OF_3\approx141.8^\circ$.

答 F_3 为 70 N，F_3 和 F_1 间的夹角为 141.8°.

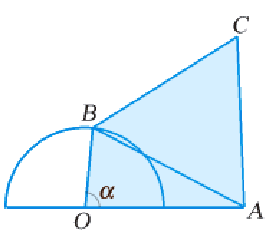


图 11－3－4

例 4 如图 11－3－4，半圆 O 的直径为 2，A 为直径延长线上的一点，$OA=2$，B 为半圆上任意一点，以 AB 为一边作等边三角形 ABC. 问：点 B 在什么位置时，四边形 $OACB$ 面积最大？

分析 四边形的面积由点 B 的位置惟一确定，而点 B 由 $\angle AOB$ 惟一确定，因此可设 $\angle AOB=\alpha$，再用 α 的三角函数来表示四边形 $OACB$ 的面积.

解 设 $\angle AOB=\alpha$. 在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理，得

$$AB^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos\alpha=5-4\cos\alpha.$$

于是，四边形 $OACB$ 的面积为

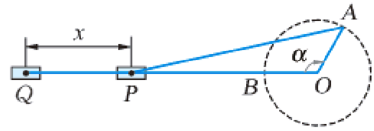
$$\begin{aligned}S&=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ABC}\\&=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2\\&=\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\alpha)\\&=\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+\frac{5}{4}\sqrt{3}\\&=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{4}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

因为 $0<\alpha<\pi$，所以当 $\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$\alpha=\frac{5}{6}\pi$，即 $\angle AOB=\frac{5}{6}\pi$ 时，四边形 $OACB$ 面积最大.

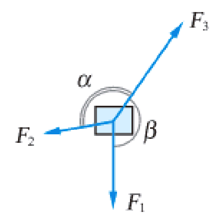
练　习

1. 曲柄连杆机构示意图如图所示. 当曲柄 OA 在水平位置 OB 时，连杆端点 P 在 Q 的位置. 当 OA 自 OB 按顺时针方向旋转 α 角时，P 和 Q 之间的距离是 x cm. 已知 $OA=25$ cm，$AP=125$ cm，根据下列条件，求 x 的值(精确到 0.1 cm)：

(1) $\alpha=50°$；　　(2) $\alpha=135°$.



(第 1 题)



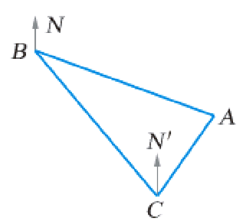
(第 2 题)

2. 如图，用两根绳子牵引重为 $F_1=100$ N 的物体，两根绳子拉力分别为 F_2，F_3，保持平衡. 如果 $F_2=80$ N，F_2 与 F_3 夹角 $\alpha=135°$.

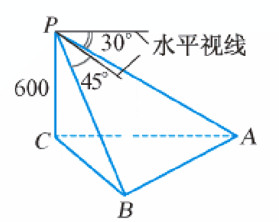
(1) 求 F_3 的大小(精确到 1 N)；

(2) 求 F_3 与 F_1 的夹角 β 的值(精确到 0.1°).

3. 如图，货轮在海上以 40 n mile/h 的速度由 B 向 C 航行，航行的方位角 $\angle NBC=140°$，A 处有灯塔，其方位角 $\angle NBA=110°$，在 C 处观察灯塔 A 的方位角 $\angle N'CA=35°$，由 B 到 C 需航行 0.5 h，求 C 到灯塔 A 的距离.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，某人在高出海面 600 m 的山上 P 处，测得海面上的航标 A 在正东，俯

角为 30°，航标 B 在南偏东 60°，俯角为 45°，求这两个航标间的距离.

习题 11.3

感受 · 理解

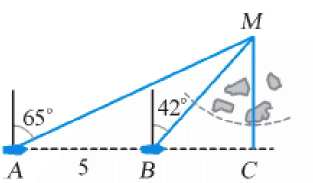
1. 在 ABC 中，求证：

(1) $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$；

(2) $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

2. 从 200 m 高的电视塔顶 A 测得地面上某两点 B，C 的俯角分别为 30° 和 45°，$\angle BAC=45°$，求这两个点之间的距离.

3. 飞机的航线和山顶在同一个铅直平面内，已知飞机的高度为海拔 20 250 m，速度为 600 km/h，飞行员先看到山顶的俯角为 18°30′，经过 288 s 后又看到山顶的俯角为 81°，求山顶的海拔高度(精确到 1 m).



(第 4 题)

4. 如图，一船由西向东航行，测得某岛的方位角为 65°，前进5 km后测得此岛的方位角为 42°. 已知该岛周围 3 km 内有暗礁，如果继续东行，有无触礁危险？

5. 作用于同一点的三个力 F_1，F_2，F_3 平衡，且 F_1，F_2 的夹角为 θ_3，F_2，F_3 的夹角为 θ_1，F_3，F_1 的夹角为 θ_2，求证：$\dfrac{F_1}{\sin\theta_1}=\dfrac{F_2}{\sin\theta_2}=\dfrac{F_3}{\sin\theta_3}$.

6. 把一根长为 30 cm 的木条锯成两段，分别作钝角三角形 ABC 的两边 AB 和 BC，且 $\angle ABC=120°$. 如何锯断木条，才能使第三条边 AC 最短？

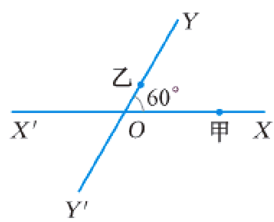
思考 · 运用

7. 如图，有两条相交成 60°角的直路 XX'，YY'，交点是 O，甲、乙分别在 OX，OY 上，起初甲离 O 点 3 km，乙离 O 点 1 km. 后来甲沿 XX'的方向，乙沿$Y'Y$ 的方向，同时用 4 km/h 的速度步行.

(1) 起初两人的距离是多少？

(2) t h 后两人的距离是多少？

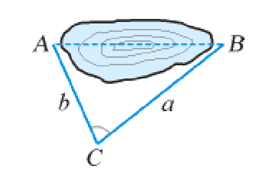
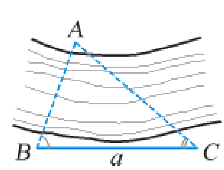
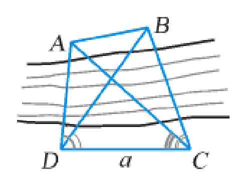
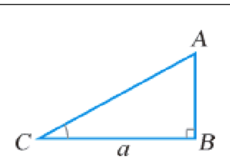
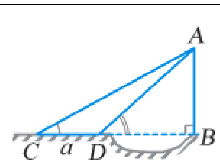
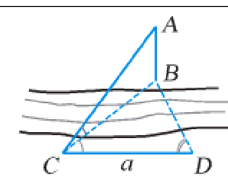
(3) 什么时候两人的距离最短？



(第 7 题)

探究 · 拓展

8. 解三角形在测量上有着广泛的应用，下面各图描述了测量中的一些基本问题，你能根据图示说出求解 AB 的过程吗？

求距离	两点间不可通又不可视	两点间可视但不可达	两点都不可达
			
求高度	底部可达	底部不可达	
			

实习作业　解三角形在测量中的应用

你知道学校的旗杆有多高？

如何测量山高或电视塔的高度？

怎样计算房屋前后的两根电线杆之间的距离？

……

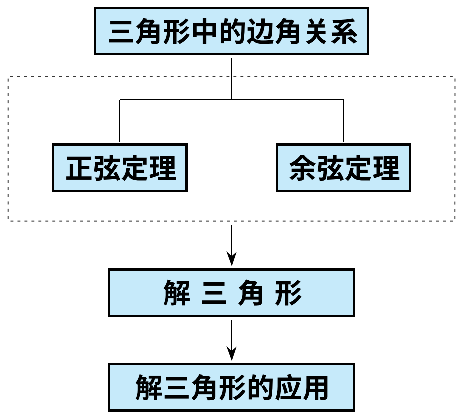
运用本章所学的知识，通过实地测量，你就能顺利地解决上面的问题. 在测量实践中，你可以更好地体会数学在解决实际问题中的作用和价值.

活动建议：

1. 准备简单的测量长度、角度的工具（如皮尺、测角器等）；
2. 选择适当的测量问题（目标不易直接到达）；
3. 设计测量方案；
4. 收集数据，利用数据进行计算；
5. 完成实习作业报告；
6. 班级交流（报告会、墙报展示等）.

本章回顾

本章主要学习了正弦定理、余弦定理，以及正弦定理、余弦定理在解决实际问题中的简单应用.



正弦定理、余弦定理是反映三角形边、角关系的重要定理. 利用正弦定理、余弦定理，可以将三角形中的边的关系与角的关系进行相互转化，许多几何问题也可以转化为解三角形的问题来研究.

复 习 题

感受 · 理解

1. 在$\triangle ABC$中，

（1）已知 $a=1$，$A=60^\circ$，$c=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 C；

（2）已知 $a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，求 A；

（3）已知 $a=3\sqrt{3}$，$c=2$，$B=150^\circ$，求 b.

2. 在$\triangle ABC$中，

（1）已知 $a-b=c\cos B-c\cos A$，判断$\triangle ABC$的形状；

（2）已知 $\sin C=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$，判断$\triangle ABC$的形状.

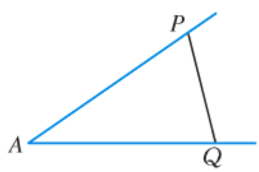
3. 海上有 A，B 两个小岛相距 10 n mile，从 A 岛望 C 岛和 B 岛所成的视角为 60°，从 B 岛望 C 岛和 A 岛所成的视角为 75°，试求 B 岛和 C 岛间的距离.

4. 在 O 点的正上方有气球 P，从 O 点的正西方 A 点，测得气球 P 的仰角为 45°，同时从 O 点南偏东 45°的 B 点，测得气球 P 的仰角为 60°，A，B 两点间的距离为 200 m. 问：气球 P 离地面约多少米（精确到 1 m）？

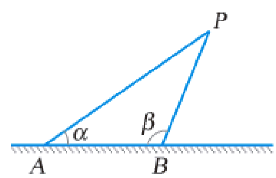
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 135°，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角等于 120°，$|\boldsymbol{c}|=2$，求 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$.

思考 · 运用

6. 如图，已知$\angle A$为定角，P，Q分别在$\angle A$的两边上，PQ为定长. 当 P，Q 处于什么位置时，$\triangle APQ$的面积最大？



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 外轮除特许外，不得进入离我国海岸线 d n mile 以内的区域. 如图，设 A，B 是相距 s n mile 的两个观察站，一外轮在 P 点，测得$\angle BAP=\alpha$，$\angle ABP=\beta$，问：α，β满足什么关系时就该向外轮发出警告，令其退出我海域？

探究 · 拓展

8. （阅读题）在必修 3 中，我们曾介绍过南宋时期的数学家秦九韶发现的求三角形面积的“三斜求积”公式

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]},$$

它与古希腊数学家海伦给出的三角形面积公式

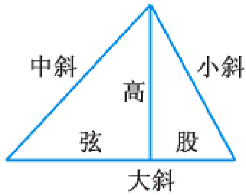
$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad \left(p=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

是一致的.

“三斜求积”公式的证明已经失传，吴文俊教授根据我国古代几何证明

的传统特点作了一个补证.

式中"大"、"中"和"小"分别指"大斜"、"中斜"和"小斜".



$$面积^2=\frac{1}{4}\left[小^2\cdot大^2-\left(\frac{大^2+小^2-中^2}{2}\right)^2\right]$$

（第 8 题）

如图，作大斜上的高分大斜成两部分，作为勾股形的弦和股，由于三角形面积等于"$\frac{1}{2}\times高\times大$"这一事实是我国古代数学家早就知道的，所以问题归结为怎样求高，而高又是可以通过"股"与"小"求得，因此只要求出股就可以了.

根据刘徽得出的公式

$$股=\frac{(股弦和)^2-勾^2}{2\times股弦和},$$

知道由"股弦和"与"勾^2"可以求股，所以问题又归结为求"勾^2"与"股弦和".这很简单，因为

$$股弦和=大,勾^2=弦^2-股^2=中^2-小^2,$$

所以

$$股=\frac{(股弦和)^2-勾^2}{2\times股弦和}=\frac{大^2-(中^2-小^2)}{2\times大},$$

$$高^2=小^2-股^2=小^2-\left(\frac{大^2+小^2-中^2}{2\times大}\right)^2.$$

从而得到"三斜求积"公式.

你能用正弦定理和余弦定理证明"三斜求积"公式或海伦公式吗？

第 12 章　数　　列

- 数列
  - 数列的概念和简单表示
  - 等差数列
    - 等差数列的概念
    - 等差数列的通项公式
    - 等差数列的前n项和
  - 等比数列
    - 等比数列的概念
    - 等比数列的通项公式
    - 等比数列的前n项和

数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正在于各部分之间的联系.

——希尔伯特

大千世界蕴含着无数的自然规律，从细胞分裂到放射性物质的衰变，从树木的生成模式到葵花种子、鹦鹉螺壳花纹的排列……它们各有其消长的方式和特点.

在日常生活中，我们经常会遇到存款利息、购房贷款、资产折旧等实际计算问题.

描述、解决上述问题，就要用到本章我们将要学习的数列的有关知识. 在本章中，我们主要研究两种特殊的数列——等差数列和等比数列.

- 等差数列和等比数列各有什么特点？
- 如何运用等差数列和等比数列解决有关的实际问题？

12.1　数列的概念和简单表示

考察下面的问题：

某剧场有 30 排座位，第一排有 20 个座位，从第二排起，后一排都比前一排多 2 个座位（图 12－1－1），那么各排的座位数依次为

$$20,\ 22,\ 24,\ 26,\ 28,\ \cdots. \quad ①$$

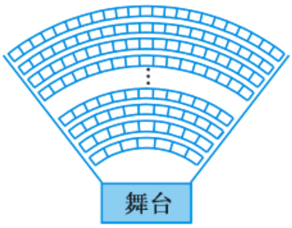


图 12－1－1

人们在 1740 年发现了一颗彗星，并推算出这颗彗星每隔 83 年出现一次，那么从发现那次算起，这颗彗星出现的年份依次为

$$1740,\ 1823,\ 1906,\ 1989,\ 2072,\ \cdots. \quad ②$$

某种细胞，如果每个细胞每分钟分裂为 2 个，那么每过 1 分钟，1 个细胞分裂的个数依次为

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots. \quad ③$$

“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的意思为：一尺长的木棒，每日取其一半，永远也取不完. 如果将“一尺之棰”视为 1 份，那么每日剩下的部分依次为

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots. \quad ④$$

某种树木第 1 年长出幼枝，第 2 年幼枝长成粗干，第 3 年粗干可生出幼枝（图 12－1－2），那么按照这个规律，各年树木的枝干数依次为

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots. \quad ⑤$$

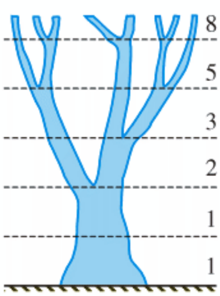


图 12－1－2

从 1984 年到 2004 年，我国共参加了 6 次奥运会，各次参赛获得的金牌总数依次为

$$15,\ 5,\ 16,\ 16,\ 28,\ 32. \quad ⑥$$

● 这些问题有什么共同的特点？

像这样按照一定次序排列的一列数称为**数列**（sequence of number），数列中的每个数都叫做这个数列的**项**（term）.

数列的一般形式可以写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

简记为 $\{a_n\}$，其中 a_1 称为数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项（或称为**首项**），a_2 称为第 2 项，…，a_n 称为第 n 项.

项数有限的数列叫做有穷数列，项数无限的数列叫做无穷数列.

在数列$\{a_n\}$中，对于每一个正整数n（或$n\in\{1,2,\cdots,k\}$），都有一个数a_n与之对应，因此，数列可以看成以正整数集$\mathbf{N}^*$（或它的有限子集$\{1,2,\cdots,k\}$）为定义域的函数$a_n=f(n)$，当自变量按照从小到大的顺序依次取值时，所对应的一列函数值. 反过来，对于函数$y=f(x)$，如果$f(i)(i=1,2,3,\cdots)$有意义，那么我们可以得到一个数列

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots.$$

例 1 已知数列的第n项a_n为$2n-1$，写出这个数列的首项、第 2 项和第 3 项.

解 首项为 $a_1=2\times1-1=1$；

第 2 项为 $a_2=2\times2-1=3$；

第 3 项为 $a_3=2\times3-1=5$.

在例 1 中，第n项a_n可用一个公式$2n-1$来表示. 一般地，如果数列$\{a_n\}$的第n项与序号n之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式叫做这个数列的**通项公式**(the formula of general term).

数列可以用通项公式来描述，也可以通过列表或图象来表示.

例 2 已知数列$\{a_n\}$的通项公式，写出这个数列的前 5 项，并作出它的图象：

(1) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$；　　(2) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2^n}$.

解 我们用列表法分别给出这两个数列的前 5 项.

n	1	2	3	4	5
$a_n=\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{5}{6}$
$a_n=\dfrac{(-1)^n}{2^n}$	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{16}$	$-\dfrac{1}{32}$

它们的图象如图 12－1－3 所示.

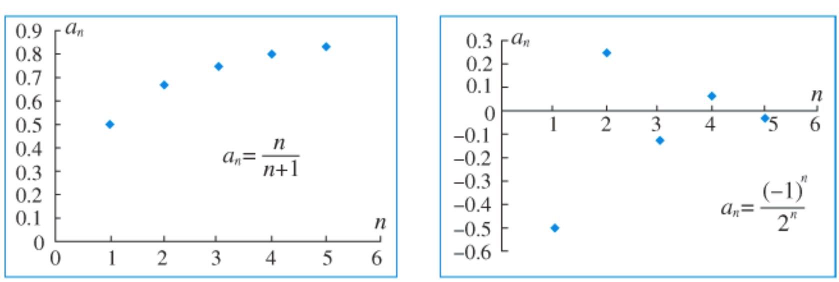


图 12－1－3

EXCEL

已知数列的通项公式，我们可以在 Excel 中方便地作出这个数列的图象，进而观察它的变化趋势.

例如，在单元格 A1，A2 内分别输入 1，2，选中这两个单元格后向下拖曳填充柄，生成序号 1，2，3，…. 在 B1 内输入“=A1/(A1+1)”，双击 B1 的填充柄，就得到与序号相对应的项.

选中 A，B 两列，插入“图表”，选择“XY 散点图”，可得数列 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ 的图象(图 12－1－4).

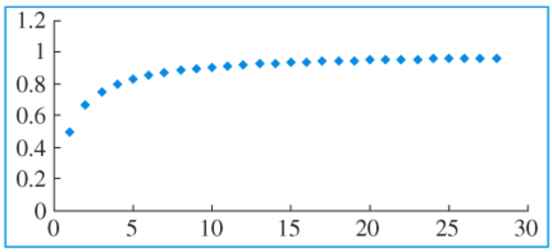
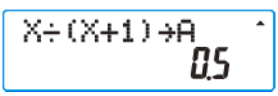


图 12－1－4

CALCULATOR



用计算器计算数列连续各项的方法：

(1) 项数赋初值. 如 $x=1$，按键顺序 $\boxed{1}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{X}}$.

(2) 计算对应项. 以上面例 2(1)中的通项为例，按如下顺序按键：$\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$，得第 1 项 0.5.

(3) 项数增加 1. 按 $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{X}}$ 键，得 $x=2$.

(4) 按 $\boxed{\blacktriangle}$ $\boxed{=}$ 键，可得第 2 项的值. 反复按 $\boxed{\blacktriangle}$ $\boxed{=}$ 键，依次得下一项的项数及对应项的值.

如果在第(3)步中将项数增加 2，则可得到第 3，5，7，…项.

例 3 写出一个数列的通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $\dfrac{1}{1\times2}$，$-\dfrac{1}{2\times3}$，$\dfrac{1}{3\times4}$，$-\dfrac{1}{4\times5}$；

(2) 0，2，0，2.

写出数列的通项公式，就是寻找 a_n 与 n 的对应关系 $a_n=f(n)$.

解 (1) 这个数列的前 4 项的分母都等于序号与序号加 1 的积，且奇数项为正，偶数项为负，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

(2) 这个数列的奇数项是 0，偶数项是 2，所以它的一个通项公式是

$$a_n=1+(-1)^n.$$

练　习

1. 举出一些数列的例子.
2. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式,写出它的前 5 项:
   (1) $a_n=1-3n$;　　(2) $a_n=(-1)^n 2n$.
3. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式,写出它的第 6 项和第 10 项:
   (1) $a_n=n^2+n$;　　(2) $a_n=5-2^{n-1}$.
4. 37 是否为数列 $\{3n+1\}$ 中的项?如果是,是第几项?
5. 写出一个数列的通项公式,使它的前 4 项分别是下列各数:
   (1) -1, 2, -3, 4;
   (2) 2, 4, 6, 8;
   (3) 1, 4, 9, 16;
   (4) $1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.
6. 写出本节开始问题中数列①,③的通项公式,并作出前 5 项的图象.

习题 12.1

感受・理解

1. 写出一个数列的通项公式,使它的前 4 项分别是下列各数:
   (1) 2, 4, 8, 16;　　(2) 1, 8, 27, 64;
   (3) -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$;　　(4) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2.
2. 已知数列 $\{n(n+2)\}$.
   (1) 写出这个数列的第 8 项和第 20 项;
   (2) 323 是不是这个数列中的项?如果是,是第几项?
3. 写出数列$\{a_n\}$的前 5 项,并作出前 5 项的图象:
   (1) $a_n=2n+3$;　　(2) $a_n=3$;
   (3) $a_n=\frac{1}{3}(2^n-1)$;　　(4) $a_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数};\\ 2n-1, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

思考・运用

4. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=n^2+3n+2$, 56 是这个数列中的项吗?如果是,是第几项?
5. 写出下列数列的通项公式:
   (1) 1, 3, 1, 3, 1, 3;　　(2) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{5}{18}$, $-\frac{7}{54}$.
6. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=n^2-8n+5$.
   (1) 写出这个数列的前 5 项,并作出前 5 项的图象;
   (2)这个数列所有项中有没有最小的项?

12.2 等差数列

12.2.1 等差数列的概念

回顾第 12.1 节开始我们遇到的数列①,②,再考察下面的问题:

第 23 届到第 28 届奥运会举行的年份依次为

$$1984,\ 1988,\ 1992,\ 1996,\ 2000,\ 2004.$$

某电信公司的一种计费标准是:通话时间不超过 3 分钟,收话费 0.2 元,以后每分钟收话费 0.1 元,那么通话费按从小到大的次序依次为

$$0.2,\ 0.2+0.1,\ 0.2+0.1\times 2,\ 0.2+0.1\times 3,\ \cdots.$$

“本利和”是指本金与利息的和,按照单利计算本利和的公式是

本利和=本金×(1+利率×存期).

如果 1 年期储蓄的月利率为 1.65‰,那么将 10 000 元分别存 1 个月、2 个月、3 个月……12 个月,所得的本利和依次为

$$10\ 000+16.5,\ 10\ 000+16.5\times 2,\ \cdots,\ 10\ 000+16.5\times 12.$$

● 上面这些数列有什么共同的特点?

在等差数列 $\{a_n\}$ 中,始终有

$$a_{n+1}-a_n=d.$$

一般地,如果一个数列从第二项起,每一项减去它的前一项所得的差都等于同一个常数,那么这个数列就叫做**等差数列**(arithmetic progression),这个常数叫做等差数列的**公差**(common difference),公差通常用 d 表示.

思　考

你能再举出一些等差数列的例子吗?

例 1　判断下列数列是否为等差数列:

(1) 1, 1, 1, 1, 1;

(2) 4, 7, 10, 13, 16;

(3) −3, −2, −1, 1, 2, 3.

解　(1) 所给数列是首项为 1,公差为 0 的等差数列.

(2) 所给数列是首项为 4,公差为 3 的等差数列.

(3) 因为

$$(-1)-(-2)\neq 1-(-1),$$

所以这个数列不是等差数列.

例 2 求出下列等差数列中的未知项:

(1) 3, a, 5;

(2) 3, b, c, -9.

解 (1) 根据题意,得

$$a-3=5-a,$$

解得

$$a=4.$$

(2) 根据题意,得

$$\begin{cases}b-3=c-b,\\ c-b=-9-c,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}b=-1,\\ c=-5.\end{cases}$$

练 习

1. 判断下列数列是否为等差数列:

(1) -1, -1, -1, -1, -1;

(2) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$;

(3) 1, 0, 1, 0, 1, 0;

(4) 2, 4, 6, 8, 10, 12;

(5) 7, 12, 17, 22, 27.

2. 目前男子举重比赛共有 10 个级别,除 108 公斤以上级外,其余的 9 个级别从小到大依次为(单位: kg)54, 59, 64, 70, 76, 83, 91, 99, 108,这个数列是等差数列吗?

3. 已知下列数列是等差数列,试在括号内填上适当的数:

(1) ( ), 5, 10;

(2) 1, $\sqrt{2}$, ( );

(3) 31, ( ), ( ), 10.

12.2.2 等差数列的通项公式

观察等差数列$\{a_n\}$

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \cdots,$$

如何写出它的第 100 项 a_{100} 呢?

我们有

$$a_1=4,$$

$$a_2 = 7 = 4 + 3,$$
$$a_3 = 10 = 4 + 3 \times 2,$$
$$a_4 = 13 = 4 + 3 \times 3,$$
$$\cdots\cdots$$

从而

$$a_{100} = 4 + 3 \times 99 = 301.$$

● 设$\{a_n\}$是一个首项为a_1，公差为d的等差数列，你能写出它的第n项a_n吗？

一般地，对于等差数列$\{a_n\}$的第n项a_n，有

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

这就是等差数列$\{a_n\}$的通项公式，其中a_1为首项，d为公差.

证 因为$\{a_n\}$为等差数列，所以当$n \geqslant 2$时，有

$$a_2 - a_1 = d,$$
$$a_3 - a_2 = d,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n - a_{n-1} = d.$$

将上面$n-1$个等式的两边分别相加，得

$$a_n - a_1 = (n-1)d,$$

所以

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

当$n = 1$时，上面的等式也成立.

例 1 第一届现代奥运会于 1896 年在希腊雅典举行，此后每 4 年举行一次. 奥运会如因故不能举行，届数照算.

（1）试写出由举行奥运会的年份构成的数列的通项公式；

（2）2008 年北京奥运会是第几届？2050 年举行奥运会吗？

解 （1）由题意知，举行奥运会的年份构成的数列是一个以 1 896 为首项，4 为公差的等差数列. 这个数列的通项公式为

$$\begin{aligned} a_n &= 1\,896 + 4(n-1) \\ &= 1\,892 + 4n \quad (n \in \mathbf{N}^*). \end{aligned}$$

（2）假设$a_n = 2\,008$，由$2\,008 = 1\,892 + 4n$，得$n = 29$.

假设$a_n = 2\,050$，$2\,050 = 1\,892 + 4n$无正整数解.

答 所求通项公式为 $a_n=1\,892+4n\quad(n\in\mathbf{N}^*)$，2008 年北京奥运会是第 29 届奥运会，2050 年不举行奥运会.

例 2 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_3=10$，$a_9=28$，求 a_{12}.

解 由题意，得

$$\begin{cases}a_1+2d=10,\\a_1+8d=28.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a_1=4,\\d=3,\end{cases}$$

所以

$$a_{12}=4+(12-1)\times 3=37.$$

例 3 某滑轮组由直径成等差数列的 6 个滑轮组成. 已知最小和最大的滑轮的直径分别为 15 cm 和 25 cm，求中间四个滑轮的直径.

解 用$\{a_n\}$表示滑轮的直径所构成的等差数列，且 $a_1=15$，$a_6=25$. 由等差数列的通项公式，得

$$a_6=a_1+(6-1)d,$$

即

$$25=15+5d,$$

解得

$$d=2.$$

由此得 $a_2=17$，$a_3=19$，$a_4=21$，$a_5=23$.

答 中间四个滑轮的直径顺次为 17 cm，19 cm，21 cm，23 cm.

思 考

如果一个数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=kn+b$，其中 k，b 都是常数，那么这个数列一定是等差数列吗？

练 习

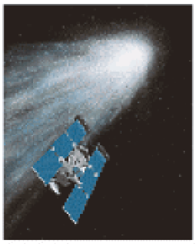
1. 求下列等差数列的第 n 项：

(1) 13，9，5，…；　　(2) $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，….

2. (1) 求等差数列 8，5，2，…的第 20 项；

(2) 等差数列 -5，-9，-13，…的第几项是 -401？

(3) -20 是不是等差数列 0，$-\frac{7}{2}$，-7，…的项？如果是，是第几项？如果不是，请说明理由.



3. 诺沃尔(Knowall)在 1740 年发现了一颗彗星，并推算出在 1823 年、1906 年、1989 年……人们都可以看到这颗彗星，即彗星每隔 83 年出现一次.
   (1) 从发现那次算起，彗星第 8 次出现是在哪一年？
   (2) 你认为这颗彗星在 2500 年会出现吗？为什么？
4. 全国统一鞋号中，成年男鞋有 14 种尺码，其中最小的尺码是 23.5 cm，各相邻两个尺码都相差 0.5 cm，其中最大的尺码是多少？
5. 一个等差数列的第 40 项等于第 20 项与第 30 项的和，且公差是 -10，试求首项和第 10 项.

例 4　已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$，求首项 a_1 和公差 d.

解

$$a_1=2\times1-1=1,$$

$$a_2=2\times2-1=3,$$

所以

$$d=a_2-a_1=3-1=2.$$

或 $d=a_{n+1}-a_n=2(n+1)-1-(2n-1)=2.$

等差数列的通项公式

$$a_n=2n-1$$

是关于 n 的一次式，从图象上看，表示这个数列的各点 $(n,\ a_n)$ 均在直线 $y=2x-1$ 上(图 12-2-1).

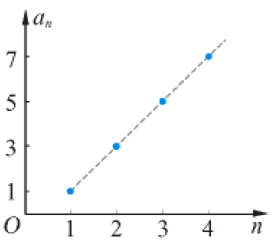


图 12-2-1

例 5　(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，是否有

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}(n\geqslant2)?$$

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中，如果对于任意的正整数 $n(n\geqslant2)$，都有

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$

那么数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列吗？

解　(1) 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以

$$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant2),$$

所以

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中，如果对于任意的正整数 $n(n\geqslant2)$ 都有

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$

那么

$$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2).$$

这表明，这个数列从第 2 项起，后一项减去前一项所得的差始终相等，所以数列$\{a_n\}$是等差数列.

例 6 如图 12－2－2，三个正方形的边 AB，BC，CD 的长组成等差数列，且 $AD=21$ cm，这三个正方形的面积之和是 179 cm^2.

（1）求 AB，BC，CD 的长；

（2）以 AB，BC，CD 的长为等差数列的前三项，以第 10 项为边长的正方形的面积是多少？

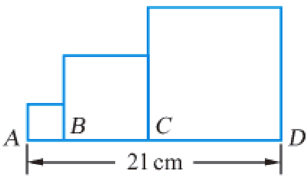


图 12－2－2

解 （1）设公差为 $d(d>0)$，$BC=x$，则 $AB=x-d$，$CD=x+d$. 由题意得

$$\begin{cases}(x-d)+x+(x+d)=21,\\(x-d)^2+x^2+(x+d)^2=179,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=7,\\d=4\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=7,\\d=-4\end{cases}(\text{舍去}).$$

所以 $AB=3(\text{cm})$，$BC=7(\text{cm})$，$CD=11(\text{cm})$.

（2）正方形的边长组成首项是 3，公差是 4 的等差数列$\{a_n\}$，所以

$$a_{10}=3+(10-1)\times 4=39.$$

$$a_{10}^2=39^2=1\,521(\text{cm}^2).$$

所求正方形的面积为 1 521 cm^2.

练　习

1. 已知等差数列的通项公式为 $a_n=1-\frac{1}{2}n$，求它的首项和公差，并画出它的图象.
2. 已知 a_1，a_2，a_3，…，a_n，a_{n+1}，…，a_{2n} 是公差为 d 的等差数列.
   （1）a_n，a_{n-1}，…，a_2，a_1 也成等差数列吗？如果是，公差是多少？
   （2）a_2，a_4，a_6，…，a_{2n} 也成等差数列吗？如果是，公差是多少？
3. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d.
   （1）将数列$\{a_n\}$中的每一项都乘以常数 a，所得的新数列仍是等差数列吗？如果是，公差是多少？
   （2）由数列$\{a_n\}$中的所有奇数项按原来的顺序组成新数列$\{c_n\}$是等差数列吗？如果是，它的首项和公差分别是多少？
4. 一个直角三角形三边的长组成等差数列，求这个直角三角形三边长的比.
5. 某货运公司的一种计费标准是：1 km 以内收费 5 元，以后每 1 km 收 2.5 元. 如果运输某批物资 80 km，那么需支付多少元运费？

习题 12.2(1)

感受・理解

1. 判断下列数列是否为等差数列：

(1) $\frac{1}{2}$，1，$\frac{3}{2}$，2，$\frac{5}{2}$；　　(2) 4，2，0，-2，-4；

(3) 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，2.

2. 求出下列等差数列中的未知项：

(1) a，b，-10，c，-20；　　(2) x，$\lg 3$，$\lg 6$，y.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_1=-1$，$d=4$，求 a_8；

(2) 已知 $a_4=4$，$a_8=-4$，求 a_{12}；

(3) 已知 $d=-\frac{1}{3}$，$a_7=8$，求 a_1.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，

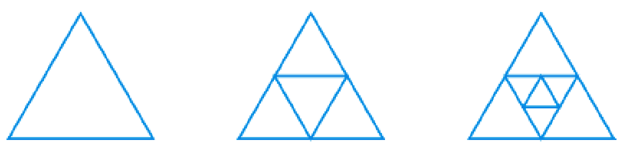
(1) 已知 $a_3=31$，$a_7=76$，求 a_1 和 d；

(2) 已知 $a_1+a_6=12$，$a_4=7$，求 a_9.

5. 一种变速自行车后齿轮组由 5 个齿轮组成，它们的齿数成等差数列，其中最小和最大的齿轮的齿数分别为 12 和 28，求中间三个齿轮的齿数.

6. 三个数成等差数列，它们的和是 15，它们的平方和等于 83，求这三个数.

7. 如图(1)是一个三角形，分别连结这个三角形三边的中点，将原三角形剖分成 4 个三角形(如图(2))，再分别连结图(2)中间的小三角形三边的中点，又可将原三角形剖分成 7 个三角形(如图(3)). 依此类推，第 n 个图中原三角形被剖分为 a_n 个三角形.



(1)　　(2)　　(3)

(第 7 题)

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 第 100 个图中原三角形被剖分为多少个三角形？

8. 已知两个数列 x，a_1，a_2，a_3，y 与 x，b_1，b_2，y 都是等差数列，且 $x\neq y$，求 $\frac{a_2-a_1}{b_2-b_1}$ 的值.

9. 如果 a，A，b 这三个数成等差数列，那么 $A=\frac{a+b}{2}$. 我们把 $A=\frac{a+b}{2}$ 叫做 a 和 b 的**等差中项**. 试求下列各组数的等差中项：

(1) $7+3\sqrt{5}$ 和 $7-3\sqrt{5}$；　　(2) $(m+n)^2$ 和 $(m-n)^2$.

思考・运用

10. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_p=q$，$a_q=p(p\neq q)$，求 a_{p+q}.

11. 已知$\{a_n\}$是等差数列，当 $m+n=p+q$ 时，是否一定有 $a_m+a_n=a_p+a_q$？

探究·拓展

这个方筛的奥妙在于：如果某个自然数 n 出现在表中，那么 $2n+1$ 肯定不是质数；如果 n 在表中不出现，那么 $2n+1$ 肯定是质数.

12. 1934 年，东印度（今孟加拉国）学者森德拉姆（Sundaram）发现了“正方形筛子”：

4	7	10	13	16	…
7	12	17	22	27	…
10	17	24	31	38	…
13	22	31	40	49	…
16	27	38	49	60	…
…	…	…	…	…	…

（1）这个“正方形筛子”的每一行有什么特点？每一列呢？

（2）“正方形筛子”中位于第 100 行的第 100 个数是多少？

12.2.3　等差数列的前 n 项和

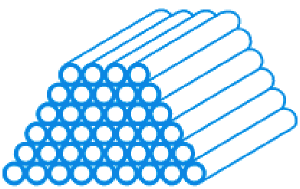


图 12－2－3

先考察图 12－2－3. 这是某仓库堆放的一堆钢管，最上面的一层有 4 根钢管，下面的每一层都比上一层多一根，最下面的一层有 9 根，怎样计算这堆钢管的总数呢？

假设在这堆钢管旁边倒放着同样一堆钢管（图 12－2－4）.

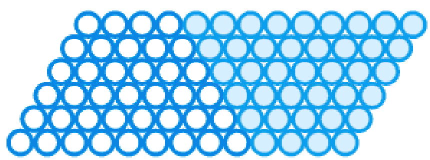


图 12－2－4

这样，每层的钢管数都等于 $4+9$，共有 6 层. 从而原来一堆钢管的总数为

$$S=\frac{6\times(4+9)}{2}=39.$$

一般地，设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，于是

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\&=a_1+(a_1+d)+\cdots+[a_1+(n-1)d].\end{aligned}\qquad ①$$

把项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$\begin{aligned}S_n&=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1\\&=a_n+(a_n-d)+\cdots+[a_n-(n-1)d].\end{aligned}\qquad ②$$

将①，②两个等式的左右两边分别相加，得

$$\begin{aligned}2S_n&=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)\\&=n(a_1+a_n),\end{aligned}$$

由此可得等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式

等差数列前 n 项的和等于首末两项和的一半的 n 倍.

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

根据等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，又可得到

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

例 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_1=3$，$a_{50}=101$，求 S_{50}；

(2) 已知 $a_1=3$，$d=\frac{1}{2}$，求 S_{10}.

解 (1) 根据等差数列前 n 项和公式，得

$$S_{50}=\frac{3+101}{2}\times 50=2\,600.$$

(2) 根据等差数列前 n 项和公式，得

$$S_{10}=10\times 3+\frac{10\times 9}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{105}{2}.$$

例 2 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $d=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{3}{2}$，$S_n=-\frac{15}{2}$，求 a_1 及 n.

解 由已知，得

$$\begin{cases}\dfrac{a_1+\frac{3}{2}}{2}\times n=-\dfrac{15}{2}, & ①\\ a_1+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}. & ②\end{cases}$$

在等差数列的通项公式与前 n 项和公式中，含有 a_1，d，n，a_n，S_n 五个量，只要已知其中的三个量，就可以求出余下的两个量.

由②，得

$$a_1=-\frac{1}{2}n+2,$$

代入①后化简，得

$$n^2-7n-30=0.$$

所以 $n=10$ 或 -3（舍去），从而 $a_1=-3$.

例 3 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知第 1 项到第 10 项的和为 310，第 11 项到第 20 项的和为 910，求第 21 项到第 30 项的和.

解 设等差数列的首项为 a_1，公差为 d，由题意，得

$$\begin{cases}S_{10}=310,\\ S_{20}-S_{10}=910,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}10a_1+\dfrac{10\times 9}{2}d=310,\\[2ex]20a_1+\dfrac{20\times 19}{2}d-310=910,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a_1=4,\\ d=6.\end{cases}$$

所以 $a_{21}=4+20\times 6=124$，于是

$$a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}=10\times 124+\frac{10\times 9}{2}\times 6=1\,510,$$

即第 21 项到第 30 项的和为 1 510.

思 考

在例 3 中，我们发现 S_{10}，$S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$ 也成等差数列. 你能得到更一般的结论吗？

练 习

1. 某商店的售货员想在货架上用三角形排列方式展示一种罐头饮料，底层放置 15 个罐头，第 2 层放置 14 个罐头，第 3 层放置 13 个罐头……顶层放置一个罐头，这样的摆法需要多少个罐头？
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，
   (1) 已知 $a_1=7$，$a_{10}=-43$，求 S_{10}；
   (2) 已知 $a_1=100$，$d=-2$，求 S_{50}；
   (3) 已知 $a_{15}=-10$，$d=2$，求 S_{20}；
   (4) 已知 $a_5=8$，$a_9=24$，求 a_n 和 S_n.
3. 在等差数列 $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，…中，
   (1) 求前 20 项的和；
   (2) 已知前 n 项的和为 $\frac{155}{2}$，求 n 的值.
4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $S_8=100$，$S_{16}=392$，试求 S_{24}.

例 4 某剧场有 20 排座位，后一排比前一排多 2 个座位，最后一排有 60 个座位，这个剧场共有多少个座位？

解 这个剧场各排的座位数组成等差数列，其中公差 $d=2$，项数 $n=20$，且第 20 项是 $a_{20}=60$.

由等差数列的通项公式，得

$$60=a_1+(20-1)\times 2,$$

所以

$$a_1=22.$$

由等差数列的求和公式，得

$$S_{20}=\frac{20\times(22+60)}{2}=820.$$

答　这个剧场共有 820 个座位 .

图 12－2－5

例 5　某种卷筒卫生纸绕在盘上，空盘时盘芯直径 40 mm，满盘时直径 120 mm(图 12－2－5). 已知卫生纸的厚度为 0.1 mm，问：满盘时卫生纸的总长度大约是多少米(精确到 1 m)？

解　卫生纸的厚度为 0.1 mm，可以把绕在盘上的卫生纸近似地看做是一组同心圆，然后分别计算各圆的周长，再求总和.

各圈的半径为该层纸的中心线至盘芯中心的距离.

由内向外各圈的半径分别为

$$20.05,\ 20.15,\ \cdots,\ 59.95.$$

因此，各圈的周长分别为

$$40.1\pi,\ 40.3\pi,\ \cdots,\ 119.9\pi.$$

因为各圈半径组成首项为 20.05，公差为 0.1 的等差数列，设圈数为 n，则

$$59.95=20.05+(n-1)\times0.1,$$

所以 $n=400$.

显然，各圈的周长组成一个首项为 40.1π，公差为 0.2π，项数为 400 的等差数列. 根据等差数列的求和公式，得

$$S=400\times40.1\pi+\frac{400\times(400-1)}{2}\times0.2\pi$$
$$=32\,000\pi(\mathrm{mm}).$$

$$32\,000\pi(\mathrm{mm})\approx100(\mathrm{m}).$$

答　满盘时卫生纸的长度约为 100 m.

教育储蓄可选择 1 年、3 年、6 年这三种存期，起存金额 50 元，存款总额不超过 2 万元.

例 6　教育储蓄是一种零存整取定期储蓄存款，它享受整存整取利率，利息免税. 教育储蓄的对象为在校小学四年级(含四年级)以上的学生. 假设零存整取 3 年期教育储蓄的月利率为 2.1‰.

(1) 欲在 3 年后一次支取本息合计 2 万元，每月大约存入多少元？

(2) 零存整取 3 年期教育储蓄每月至多存入多少元？此时 3 年后本息合计约为多少？(精确到 1 元)

解　(1) 设每月存 A 元，则有

存款是按月存的，3 年存 36 次，最后一次有一个月的利息.

$$A(1+2.1‰)+A(1+2\times 2.1‰)+\cdots+A(1+36\times 2.1‰)$$
$$=20\ 000.$$

利用等差数列求和公式，得

$$A\left(36+36\times 2.1‰+\frac{36\times 35}{2}\times 2.1‰\right)=20\ 000,$$

解得

$$A\approx 535(\text{元}).$$

(2) 由于教育储蓄的存款总额不超过 2 万元，所以 3 年期教育储蓄每月至多可存入 $\frac{20\ 000}{36}\approx 555$(元). 这样，3 年后的本息和为

$$555(1+2.1‰)+555(1+2\times 2.1‰)+\cdots+555(1+36\times 2.1‰)$$
$$=555\left(36+36\times 2.1‰+\frac{36\times 35}{2}\times 2.1‰\right)$$
$$\approx 20\ 756(\text{元}).$$

答 欲在 3 年后一次支取本息 2 万元，每月大约存入 535 元. 3 年期教育储蓄每月至多存入 555 元，3 年后本息合计约 20 756 元.

探 究

教育储蓄的收益与比较

到附近银行收集本地区有关教育储蓄的信息，并尝试解决下面的问题.

(1) 依教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年，到期时一次可支取本息共多少元？

(2) 依教育储蓄的方式，每月存 a 元，连续存 3 年，到期时一次可支取本息共多少元？

(3) 依教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年，到期时一次可支取本息比同档次的“零存整取”多收益多少元？

(4) 欲在 3 年后一次支取教育储蓄本息合计 a 万元，每月应存入多少元？

(5) 依教育储蓄的方式，原打算每月存 100 元，连续存 6 年，可是到 4 年时，学生需要提前支取全部本息，一次可支取本息共多少元？

(6) 不用教育储蓄的方式，而用其他的储蓄形式，以每月可存 100 元，6 年后使用为例，探讨以现行的利率标准可能的最大收益，将得到的结果与教育储蓄比较.

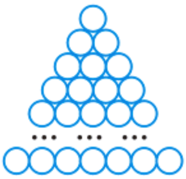
练 习

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_{101}=0$，则有(　　).

A. $a_1+a_{101}>0$　　B. $a_1+a_{101}<0$

C. $a_1+a_{101}=0$　　D. $a_{51}=51$

2. 求集合 $\{m\mid m=2n-1,\ n\in\mathbf{N}^*,\text{且 } m<60\}$ 的元素个数，并求这些元素


（第 4 题）

的和.

3. 已知一个凸多边形的内角度数组成公差为 5° 的等差数列，且最小角为 120°，问它是几边形.

4. 某钢材库新到 200 根相同的圆钢，要把它们堆放成正三角形垛（如图），并使剩余的圆钢尽可能地少，那么将剩余多少根圆钢？

习题 12.2(2)

感受・理解

1. 求下列等差数列的各项的和：

(1) $1, 5, 9, \cdots, 401$；

(2) $-3, -\frac{3}{2}, 0, \cdots, 30$；

(3) $0.7, 2.7, 4.7, \cdots, 56.7$；

(4) $-10, -9.9, -9.8, \cdots, -0.1$.

2. 求和：

(1) $\sum_{k=0}^{10}(3+0.25k)$；　　(2) $\sum_{n=0}^{20}(1-2n)$.

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_1=20$, $a_n=54$, $S_n=999$，求 d 及 n；

(2) 已知 $d=\frac{1}{3}$, $n=37$, $S_n=629$，求 a_1 及 a_n；

(3) 已知 $a_1=\frac{5}{6}$, $d=-\frac{1}{6}$, $S_n=-5$，求 n 及 a_n；

(4) 已知 $d=2$, $n=15$, $a_n=-10$，求 a_1 及 S_n.

4. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2n+1$，求它的前 n 项和.

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 2，前 9 项和为 -6，求它的前 n 项和.

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_4+a_{14}=1$，求此数列前 17 项的和；

(2) 已知 $a_{11}=20$，求此数列前 21 项的和；

(3) 已知该数列前 11 项的和 $S_{11}=66$，求第 6 项.

7. 一个等差数列的前 12 项和为 354，前 12 项中，偶数项和与奇数项和之比为 32∶27，求公差 d.

8. 时钟在 1 点钟的时候敲一下，在 2 点钟的时候敲 2 下……在 12 点钟的时候敲 12 下，中间每半点钟也敲一下. 一昼夜内它一共敲多少下？

思考・运用

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是正数，且 $a_3a_7=-12$, $a_4+a_6=-4$，求前 n 项和.

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=5n^2+3n$，求它的前 3 项，并求它的通项公式.

11. 一物体第 1 秒降落 4.90 m，以后每秒比前一秒多降落 9.80 m.

(1) 如果它从山顶落到地面，经过 5 s 到达地面，那么这山的高度是多少米？

(2) 如果它从 1 960 m 的高空落到地面，要经过几秒钟？

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-3$, $11a_5=5a_8$，求前 n 项和 S_n 的最小值.

探究·拓展

13. 观察：

$$1$$
$$1+2+1$$
$$1+2+3+2+1$$
$$1+2+3+4+3+2+1$$
$$\cdots\cdots$$

(1) 第 100 行是多少个数的和？这些数的和是多少？

(2) 计算第 n 行的值.

12.3 等比数列

12.3.1 等比数列的概念

回顾第 12.1 节开始我们遇到的数列③，④，再考察下面的问题：

放射性物质以一定的速度衰变，该速度正比于当时该物质的质量. 如果某个质量为 Q_0 的放射性物质在时间 h 中衰变到 $\frac{Q_0}{2}$，那么称 h 为物质的半衰期. 镭的半衰期是 1 620 年，如果从现有的 10 g 镭开始，那么每隔 1 620 年，剩余量依次为

$$10,\ 10\times\frac{1}{2},\ 10\times\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ 10\times\left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \cdots.$$

某轿车的售价约 36 万元，年折旧率约为 10%（就是说这辆车每年减少它的价值的 10%），那么该车从购买当年算起，逐年的价值依次为

$$36,\ 36\times0.9,\ 36\times0.9^2,\ 36\times0.9^3,\ \cdots.$$

复利的本利和公式是

本利和 = 本金 × (1 + 利率)^{存期}.

某人年初投资 10 000 元，如果年收益率是 5%，那么按照复利，5 年内各年末的本利和依次为

$$10\,000\times1.05,\ 10\,000\times1.05^2,\ \cdots,\ 10\,000\times1.05^5.$$

● 与等差数列相比，上面这些数列有什么特点？

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，始终有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q.$$

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列就叫做**等比数列**（geometric progression），这个常数叫做等比数列的**公比**（common ratio），公比通常用字母 q 表示.

例 1 判断下列数列是否为等比数列：

(1) 1，1，1，1，1；

(2) 0，1，2，4，8；

(3) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16}$.

解 (1) 所给数列是首项为 1，公比为 1 的等比数列.

(2) 因为 0 不能作除数，所以这个数列不是等比数列.

(3) 所给数列是首项为 1，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

例 2 求出下列等比数列中的未知项：

(1) 2，a，8；

(2) -4，b，c，$\frac{1}{2}$.

解 (1) 根据题意，得

$$\frac{a}{2}=\frac{8}{a},$$

所以

$$a=4 \text{ 或 } a=-4.$$

(2) 根据题意，得

$$\begin{cases}\dfrac{b}{-4}=\dfrac{c}{b},\\ \dfrac{\frac{1}{2}}{c}=\dfrac{c}{b},\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}b=2,\\ c=-1.\end{cases}$$

所以

$$b=2,\ c=-1.$$

练　习

1. 判断下列数列是否为等比数列：

(1) 1，2，1，2，1；　　(2) -2，-2，-2，-2；

(3) 1，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$-\frac{1}{27}$，$\frac{1}{81}$；　　(4) 2，1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，0.

2. 已知下列数列是等比数列，试在括号内填上适当的数：

(1) (　)，3，27；　　(2) 3，(　)，5；

(3) 1，(　)，(　)，$\frac{81}{8}$.

3. 下列数列哪些是等差数列，哪些是等比数列？

(1) lg 3，lg 6，lg 12；　　(2) 2^2，2，1，2^{-1}，2^{-2}；

(3) a，a，a，a，a.

12.3.2　等比数列的通项公式

设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公比为 q 的等比数列，则

$$a_2=a_1q,\ a_3=a_2q=a_1q^2,\ a_4=a_3q=a_1q^3,\ \cdots.$$

● 你能写出它的第 n 项 a_n 吗？

一般地,对于等比数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n,有公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

这就是等比数列$\{a_n\}$的通项公式,其中 a_1 为首项,q 为公比.

证 因为$\{a_n\}$是等比数列,所以当 $n \geqslant 2$ 时,有

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q, \frac{a_4}{a_3} = q, \cdots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

将上面 $n-1$ 个等式的左右两边分别相乘,得

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}.$$

所以

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

当 $n = 1$ 时,上面的等式也成立.

例 1 在等比数列$\{a_n\}$中,

(1) 已知 $a_1 = 3$, $q = -2$,求 a_6;

(2) 已知 $a_3 = 20$, $a_6 = 160$,求 a_n.

解 (1) 由等比数列的通项公式,得

$$a_6 = 3 \times (-2)^{6-1} = -96.$$

(2) 设等比数列的公比为 q,那么

$$\begin{cases} a_1 q^2 = 20, \\ a_1 q^5 = 160, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} q = 2, \\ a_1 = 5. \end{cases}$$

所以

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 5 \times 2^{n-1}.$$

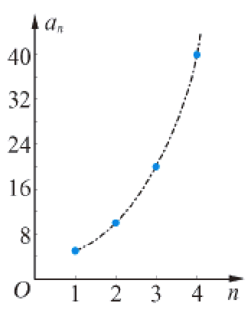


图 12-3-1

在例 1(2)中,等比数列的通项公式

$$a_n = 5 \times 2^{n-1}$$

是一个常数与指数式的乘积. 从图象上看,表示这个数列的各点(n, a_n)均在函数 $y = 5 \times 2^{x-1}$ 的图象上(图 12-3-1).

例 2 在 243 和 3 中间插入 3 个数,使这 5 个数成等比数列.

解 设插入的三个数为 a_2, a_3, a_4,由题意知

$$243, a_2, a_3, a_4, 3$$

成等比数列. 设公比为 q，则

$$3 = 243q^{5-1},$$

解得 $q = \pm\frac{1}{3}$.

因此，所求三个数为 81，27，9，或 −81，27，−9.

思 考

如果一个数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = aq^n$，其中 a，q 都是不为 0 的常数，那么这个数列一定是等比数列吗？

练 习

1. 求下列等比数列的公比、第 5 项和第 n 项：
   (1) 2，6，18，54，…；
   (2) 7，$\frac{14}{3}$，$\frac{28}{9}$，$\frac{56}{27}$，…；
   (3) 0.3，−0.09，0.027，−0.008 1，…；
   (4) 5，5^{c+1}，5^{2c+1}，5^{3c+1}，….
2. 已知等比数列的公比为 $\frac{2}{5}$，第 4 项是 $\frac{5}{2}$，求前三项.
3. 已知 a_1，a_2，a_3，…，a_n 是公比为 q 的等比数列，新数列 a_n，a_{n-1}，…，a_2，a_1 也是等比数列吗？如果是，公比是多少？
4. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$，首项为 a_1，公比为 q.
   (1) 依次取出数列 $\{a_n\}$ 中的所有奇数项，组成一个新数列，这个数列还是等比数列吗？如果是，它的首项和公比是多少？
   (2) 数列 $\{ca_n\}$（其中常数 $c \neq 0$）是等比数列吗？如果是，它的首项和公比是多少？
5. 在第 12.3.1 节开始有关轿车折旧的问题中，大约在购车后的第几年，该辆车的价值只有原来的一半？

例 3 (1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，是否有

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}\,(n \geqslant 2)?$$

(2) 如果数列 $\{a_n\}$ 中，对于任意的正整数 $n\,(n \geqslant 2)$，都有

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1},$$

那么，$\{a_n\}$ 一定是等比数列吗？

解 (1) 因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

即

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}\,(n \geqslant 2)$$

成立.

(2) 不一定. 例如对于数列

$$0，0，0，\cdots，$$

总有 $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$，但这个数列不是等比数列.

例 4 图 12-3-2(1)是一个边长为 1 的正三角形，将每边三等分，以中间一段为边向形外作正三角形，并擦去中间一段，得图(2)，如此继续下去，得图(3)……试求第 n 个图形的边长和周长.

这样形成的图形称为分形(fractal).

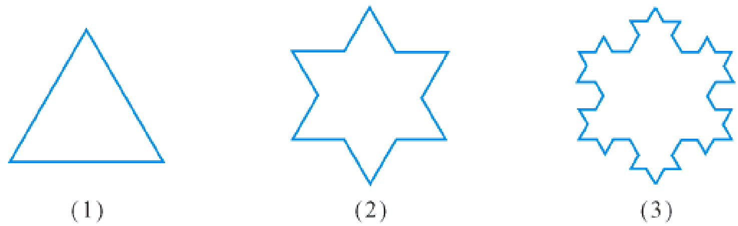


图 12-3-2

解 设第 n 个图形的边长为 a_n. 由题意知，从第二个图形起，每一个图形的边长均为上一个图形边长的 $\frac{1}{3}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列. 故

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

要计算第 n 个图形的周长，只需计算第 n 个图形的边数.

第 1 个图形的边数为 3，因为从第 2 个图形起，每一个图形的边数均为上一个图形边数的 4 倍，所以，第 n 个图形的边数为 $3 \times 4^{n-1}$.

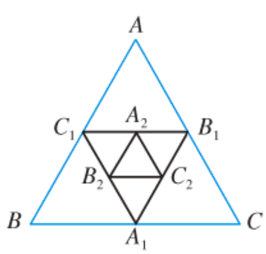
因此，第 n 个图形的周长 $= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times (3 \times 4^{n-1}) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

思 考

按照例 4 的作法形成的图形也称为雪花曲线. 可以发现，当 n 增大时，这个图形的边长越来越小，但周长却越来越大，你还能发现这个图形其他有趣的性质吗？

练 习

1. 三个数成等比数列，它们的积等于 27，它们的平方和等于 91，求这三个数.
2. 如图，在边长为 1 的等边三角形 ABC 中，连结各边中点得 $\triangle A_1B_1C_1$，再连结 $\triangle A_1B_1C_1$ 的各边中点得 $\triangle A_2B_2C_2$……如此继续下去，试证明数列 $S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle A_1B_1C_1}$，$S_{\triangle A_2B_2C_2}$，…是等比数列.
3. 在第 12.3.1 节开始有关镭的衰变问题中，经过多少年以后，还剩有原来质量的 $\frac{1}{8}$？



(第 2 题)

习题 12.3(1)

感受·理解

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_4=27$，$q=-3$，求 a_7；(2) 已知 $a_2=18$，$a_4=8$，求 a_1 和 q；

(3) 已知 $a_5=4$，$a_7=6$，求 a_9；　(4) 已知 $a_5-a_1=15$，$a_4-a_2=6$，求 a_3.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_4=4$，$a_9=972$，求 a_n；(2) 已知 $a_2=-6$，$a_{10}=-\dfrac{32}{37}$，求 a_n.

3. 在两个非零实数 a 和 b 之间插入 2 个数，使它们成等比数列，试用 a，b 表示这个等比数列的公比.

4. 已知公差不为 0 的等差数列的第 2，3，6 项依次构成一个等比数列，求该等比数列的公比.

5. 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) $a_5^2=a_1a_9$ 是否成立？$a_5^2=a_3a_7$ 是否成立？

(2) $a_n^2=a_{n-2}a_{n+2}(n>2)$ 是否成立？

(3) 你能得到更一般的结论吗？

6. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1>0$，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，求 a_3+a_5 的值.

7. 有一种计算机病毒可以通过电子邮件进行传播，如果第一轮感染的计算机数是 8 台，并且从第二轮起，以后每一台计算机都可以感染下一轮的 10 台计算机，那么到第 5 轮，可以感染多少台计算机？

8. 若 a，G，b 成等比数列，则称 G 为 a 和 b 的**等比中项**.

(1) 求 45 和 80 的等比中项；

(2) 已知两个数 $k+9$ 和 $6-k$ 的等比中项是 $2k$，求 k.

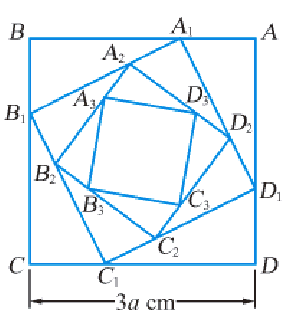
思考·运用

9. 等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1+a_2+a_3=-3$，$a_1a_2a_3=8$，求 a_4.

10. 已知$\{a_n\}$是等差数列，且公差 $d\neq 0$，又 a_1，a_3，a_9 依次成等比数列，求 $\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_6}$ 的值.

11. 某地现有耕地 10 000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%，人均粮食占有量比现在提高 10%. 如果人口年增长率为 1%，那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷(精确到 1 公顷)？

(注：粮食单产 $=\dfrac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$，人均粮食占有量 $=\dfrac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$)



(第 12 题)

12. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 $3a$ cm，分别作边 AB，BC，CD，DA 上的三等分点 A_1，B_1，C_1，D_1，得正方形 $A_1B_1C_1D_1$，再分别取边 A_1B_1，B_1C_1，C_1D_1，D_1A_1 上的三等分点 A_2，B_2，C_2，D_2，得正方形 $A_2B_2C_2D_2$，如此继续下去，得正方形 $A_3B_3C_3D_3$……

(1) 求边 A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3 的长；　(2) 求正方形 $A_nB_nC_nD_n$ 的边长.

探究·拓展

13. (开放题)设△ABC 中角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.

(1) 若 a，b，c 成等差数列，由此可得到什么结论？

(2) 若 a，b，c 成等比数列，由此可得到什么结论？

12.3.3 等比数列的前 n 项和

● 已知等比数列$\{a_n\}$的第 1 项 a_1、公比 q，如何求出它的前 n 项和 S_n？

根据等比数列的通项公式，这个等比数列就是

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \cdots,\ a_1q^{n-1},\ \cdots,$$

所以它的前 n 项和是

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}. \tag{1}$$

(1)式等号右边的每一项是它前一项的 q 倍，根据这个特点，在上式两边同乘以 q，得

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^n, \tag{2}$$

(1)－(2)，得

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n.$$

所以，当 $q \neq 1$ 时，

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (q \neq 1).$$

因为 $a_1q^n = a_nq$，所以上面的公式还可以写成

$$S_n = \frac{a_1 - a_nq}{1-q}\ (q \neq 1).$$

显然，当 $q = 1$ 时，$S_n = na_1$.

例 1 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_1 = -4,\ q = \frac{1}{2}$，求 S_{10}；

(2) 已知 $a_1 = 1,\ a_k = 243,\ q = 3$，求 S_k.

解 (1) 根据等比数列的前 n 项和公式，得

$$S_{10} = \frac{-4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1\,023}{128}.$$

(2) 根据等比数列的前 n 项和公式，得

$$S_k=\frac{1-243\times 3}{1-3}=364.$$

例 2 在等比数列$\{a_n\}$中，$S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$，求 a_n.

解 若 $q=1$，则 $S_6=2S_3$，这与已知 $S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$ 是矛盾的，所以 $q\neq 1$. 从而

在等比数列的通项公式与前 n 项和公式中，共含有 a_1，q，n，a_n，S_n 五个量，只要已知其中的三个量，就可以求出其余的两个量.

$$S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{7}{2},$$

$$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{63}{2}.$$

将上面两个等式的两边分别相除，得

$$1+q^3=9,$$

所以 $q=2$，由此可得 $a_1=\frac{1}{2}$，因此

$$a_n=\frac{1}{2}\times 2^{n-1}=2^{n-2}.$$

例 3 求数列 $1+\frac{1}{2}$，$2+\frac{1}{4}$，$3+\frac{1}{8}$，…，$n+\frac{1}{2^n}$，… 的前 n 项和.

分析 这个数列的每一项都是一个等差数列与一个等比数列的对应项的和，因此可以分组求和.

解
$$\begin{aligned}S_n&=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{4}\right)+\left(3+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(n+\frac{1}{2^n}\right)\\&=(1+2+3+\cdots+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\\&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

练 习

1. 某厂去年的产值记为 1，计划在今后五年内每年的产值比上年增长 10%，则从今年起到第五年，这个厂的总产值为(　　).

A. 1.1^4　　B. 1.1^5

C. $11\times(1.1^5-1)$　　D. $10\times(1.1^6-1)$

2. 求下列等比数列的各项和：

(1) 1，3，9，…，2 187；　　(2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots, -\frac{1}{512}$.

3. 根据下列条件，求等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n：

(1) $a_1=3$，$q=2$，$n=6$；　　(2) $a_1=-1$，$q=-\frac{1}{3}$，$n=5$；

(3) $a_1=8,\ q=\dfrac{1}{2},\ a_n=\dfrac{1}{2}$;　　(4) $a_2=0.12,\ a_5=0.000\,96,\ n=4$.

4. 求和 $\sum\limits_{k=1}^{10}(3+2^k)$.

例 4　水土流失是我国西部大开发中最突出的生态问题. 全国 9 100 万亩的坡耕地需要退耕还林，其中西部地区占 70%. 国家确定 2000 年西部地区退耕土地面积为 515 万亩，以后每年退耕土地面积递增 12%，那么从 2000 年起到 2005 年底，西部地区退耕还林的面积共有多少万亩（精确到万亩）？

解　根据题意，每年退耕还林的面积比上一年增长的百分比相同，所以从 2000 年起，每年退耕还林的面积（单位：万亩）组成一个等比数列 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=515,\ q=1+12\%=1.12,\ n=6,$$

则

$$S_6=\frac{515\times(1-1.12^6)}{1-1.12}\approx 4\,179(\text{万亩}).$$

答　从 2000 年起到 2005 年底，西部地区退耕还林的面积共有 4 179 万亩.

思　考

从 2000 年起到哪一年底，西部地区基本解决退耕还林问题？

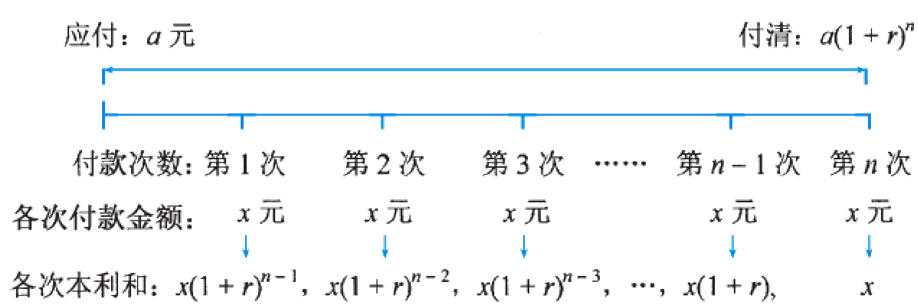
例 5　某人 2004 年初向银行申请个人住房公积金贷款 20 万元购买住房，月利率 3.375‰，按复利计算，每月等额还贷一次，并从贷款后的次月初开始还贷. 如果 10 年还清，那么每月应还贷多少元？

分析　对于分期付款，银行有如下规定：

(1) 分期付款为复利计息，每期付款数相同，且在期末付款；

(2) 到最后一次付款时，各期所付的款额的本利之和等于商品售价的本利之和.

为解决上述问题，我们先考察一般情形. 设某商品一次性付款的金额为 a 元，以分期付款的形式等额地分成 n 次付清，每期期末所付款是 x 元，则分期付款方式可表示为：



从而有

$$x[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\cdots+(1+r)+1]$$
$$=a(1+r)^n.$$

运用等比数列求和公式，化简得

$$x=\frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

这就是分期付款的数学模型.

解 设每月应还贷 x 元，共付款 $12\times10=120$ 次，则有

$$x[1+(1+0.003\,375)+(1+0.003\,375)^2+\cdots$$
$$+(1+0.003\,375)^{119}]=200\,000(1+0.003\,375)^{120},$$

使用 Excel 中的财务函数，可以方便地求出每期的付款额.

化简得

$$x=\frac{200\,000\times0.003\,375\times(1+0.003\,375)^{120}}{(1+0.003\,375)^{120}-1}$$
$$\approx2\,029.66(\text{元}).$$

答 每月应还贷款 2 029.66 元.

链 接

现 值 与 终 值

“现值”与“终值”是利息计算中的两个基本概念，掌握好这两个概念，对于顺利解决有关金融中的数学问题以及理解各种不同的算法都是十分有益的.

所谓“现值”是指在 n 期末的金额，把它扣除利息后，折合成现时的值. 而“终值”是指 n 期后的本利和. 它们计算的基点分别是存期的起点和终点.

例如，在复利计息的情况下，设本金为 A，每期利率为 r，期数为 n，到期末的本利和为 S，则

$$S=A(1+r)^n,$$

其中 S 称为 n 期末的终值，A 称为 n 期后终值 S 的现值，即 n 期后的 S 元现在的价值为

$$A=\frac{S}{(1+r)^n}.$$

例 某厂为试制新产品，需增加某些设备. 若购置这些设备，需一次付款 25 万元；若租赁这些设备，每年初付租金 3.3 万元. 已知一年期存款的年利率为 2.55%，试讨论哪种方案更好（设备寿命为 10 年）.

解法 1 （从终值来考虑）若购置设备，则 25 万元 10 年后的价值为

$$25(1+2.55\%)^{10}\approx32.159(\text{万元}).$$

若租赁设备，每年初付租金 3.3 万元，10 年后的总价值为

$$S = 3.3(1+2.55\%)^{10} + 3.3(1+2.55\%)^{9} + \cdots + 3.3(1+2.55\%) \approx 38.00(\text{万元}).$$

因此，购买设备较好.

解法 2　（从现值来考虑）每年初付租金 3.3 万元的 10 年现值之和为

$$Q = 3.3 + \frac{3.3}{1+2.55\%} + \frac{3.3}{(1+2.55\%)^2} + \cdots + \frac{3.3}{(1+2.55\%)^9} \approx 29.54(\text{万元}),$$

比购置设备一次付款 25 万元多，故购置设备的方案较好.

思　考

前面例 5 的解法是从终值的角度来考虑的，你能从现值的角度来分析并解决它吗？

EXCEL

Excel 提供了丰富的财务函数，利用这些函数我们能够轻松地完成有关投资或贷款等问题的计算. 下面介绍常用的几个函数.

（1）PMT 函数，在固定利率的等额分期付款方式中，计算投资或贷款的每期付款额.

对于例 5，只需在 Excel 单元格中输入“=PMT(0.3375%，12 * 10，200000)”，即可得到 $x \approx 2\,029.66$ 元，函数 PMT 的含义见图 12－3－3.

type的默认值为 0，表示各期结算时间在期末. 如结算时间在期初，则其值为 1.

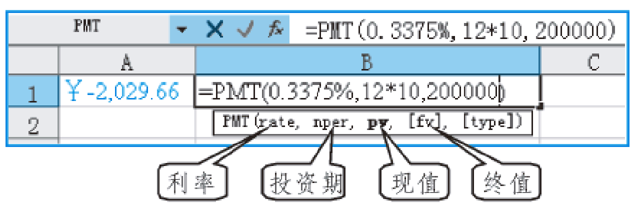


图 12－3－3

（2）FV 函数，在固定利率的等额分期付款方式中，计算某项投资的终值.

如在上面“链接”的例题中，可用“=FV(2.55%，10，3.3，，1)”计算得 $S \approx 38.00$（图 12－3－4），FV(rate，nper，pmt，[pv]，[type])中参数的含义同上.

单元格中的负值表示支出.

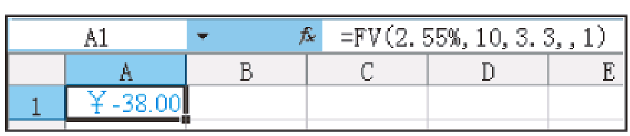


图 12－3－4

（3）PV 函数，计算一系列未来付款的现值累积和. 如在上面“链接”中，可用“=PV(2.55%，10，3.3，，1)”计算得 $Q \approx 29.54$（图 12－3－

5). PV(rate, nper, pmt, [fv], [type]) 中参数的含义同上.

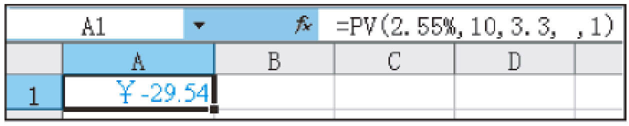


图 12-3-5

如果你在实际生活中还需要使用其他一些财务函数，可以查看 Excel 帮助文档中的相关资料.

练　习

1. 回答我国古代用诗歌形式提出的一个数列问题：

   远望巍巍塔七层，红灯向下成倍增，
   共灯三百八十一，试问塔顶几盏灯？

2. 我国 1980 年底人口以十亿计算.
   (1) 若我国人口年增长率为 1.2%，则到 2005 年底我国约有多少人口？
   (2) 要使我国到 2010 年底人口不超过 14 亿，那么人口的年平均增长率最高是多少？

3. 顾客采用分期付款的方式购买一件 5 000 元的商品，在购买一个月后第一次付款，且每月等额付款一次，在购买后的第 12 个月将货款全部付清，月利率 0.5%. 按复利计算，该顾客每月应付款多少元？

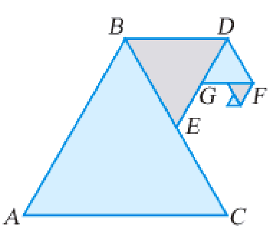
习题 12.3(2)

感受·理解

1. 求下列等比数列的前 n 项和：
   (1) $1, -1, 1, -1, \cdots$；　　(2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$.

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，
   (1) 已知 $a_1=-1.5$, $a_7=-96$，求 q 和 S_n；
   (2) 已知 $q=\frac{1}{2}$, $S_5=-\frac{31}{8}$，求 a_1 和 a_n；
   (3) 已知 $a_1=2$, $S_3=26$，求 q 和 a_n.

3. 某林场去年底森林木材储存量为 330 万 m^3. 若树木以每年 25% 的增长率生长，计划从今年起，每年底要砍伐的木材量为 x 万 m^3，为了实现经过 20 年木材储存量翻两番的目标，每年砍伐的木材量 x 的最大值是多少？



(第 4 题)

4. 如图，设正三角形 ABC 的边长为 20 cm，取 BC 边的中点 E，作正三角形 BDE；取边 DE 的中点 G，作正三角形 DFG；如此继续下去……求所得的前 20 个正三角形的面积和.

5. 某人自己创业，向银行贷款，有两种方案. 甲方案：一次性贷款 10 万元，第一年可获利 1 万元，以后每年比上一年增加 30% 的利润. 乙方案：每年贷款 1 万元，第一年可获利 1 万元，以后每年都比上一年增加利润 0.5 万元. 两种方案使用期都是 10 年，到期一次性还本付息. 若银行贷款利率均按年息 10% 的复利计算，试比较两种方案的优劣.

6. 求和：$S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.

思考·运用

7. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1+a_n=66$，$a_2a_{n-1}=128$，$S_n=126$，求 n，q.

8. 设 S_n 是等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，S_3，S_9，S_6 成等差数列，求证：a_2，a_8，a_5 成等差数列.

9. 资料表明，2000 年我国工业废弃垃圾达 7.4×10^8 t，每吨占地 1 m^2. 环保部门每回收或处理 1 t 废旧物资，相当于消灭 4 t 工业废弃垃圾. 如果环保部门 2002 年共回收处理了 10 t 废旧物资，且以后每年的回收量递增 20%.
(1) 2010 年能回收多少吨废旧物资？
(2) 从 2002 年到 2010 年底，可节约土地多少平方千米？(精确到 1 km^2)

探究·拓展

10. 回顾第 12.3.2 节例 4，尝试写出第 n 个图形的面积.

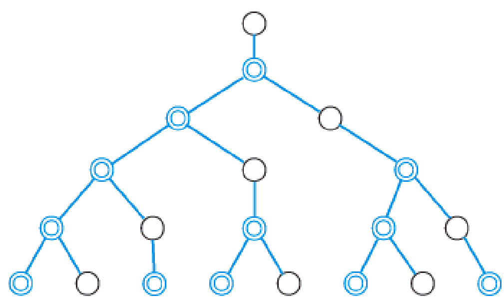
阅　读

斐波那契数列

先看一个有趣的问题：假设一对刚出生的小兔一个月后能长成大兔，再过一个月便能生下一对小兔，此后每个月生一对小兔. 如果不发生死亡，那么一对刚出生的小兔一年可繁殖成多少对？

我们用“◎”表示一对大兔，用“○”表示一对小兔，假设第一对小兔的出生日是某个月初，则逐月统计得每月初的兔子对数：

第 1 个月
第 2 个月
第 3 个月
第 4 个月
第 5 个月
第 6 个月



记第 n 个月的兔子对数为 F_n，则

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8,\ \cdots$$

考察数列$\{F_n\}$ 的规律，不难发现，从第三项开始，每一项都是它的前两项的和，即

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\in\mathbf{N}^*).$$

这样，我们就可以依次写出一串数：

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \cdots.$$

由此可知，一对兔子一年可繁殖 233($=F_{13}$)对.

上面的数列是由意大利人斐波那契于 1202 年从兔子繁殖问题中提出的，为了纪念他，人们就把这种数列称为斐波那契数列.

由一对兔子繁殖问题而衍生出来的斐波那契数列是数学中的一个有趣问题，许多问题也都与之有关. 如：

斐波那契(Leonardo Fibonacci，约 1170～1240)，生于意大利比萨. 在 1202 年写成《计算之书》一书，是欧洲大陆风行好几个世纪的数学教科书，也是一部影响很大的数学专著. 全书 15 章，其中第 12 章提出了兔子问题.

（1）树木的生长模式. 某种树木第 1 年长出幼枝，第 2 年幼枝长成粗干，第 3 年粗干可生出幼枝. 按照这个规律，到第 6 年树木有多少枝干（图 12－3－6）？

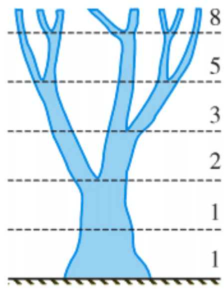


图 12－3－6

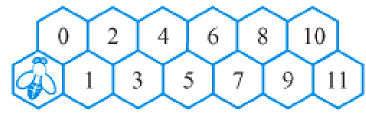


图 12－3－7

（2）观察蜜蜂爬过六角形蜂房所取的不同路线（图 12－3－7）. 假定该蜜蜂总是向相邻的蜂房移动并且总是向右移动，那么，蜜蜂到蜂房 0 有一条路，到蜂房 1 有两条路，到蜂房 2 有三条路，到蜂房 3 有五条路……

（3）由正方形可以构成一系列的长方形，其边长为斐波那契数列的连续项. 在正方形内绘出一个圆的 $\frac{1}{4}$，就可以近似地得到等角螺线（图 12－3－8）.

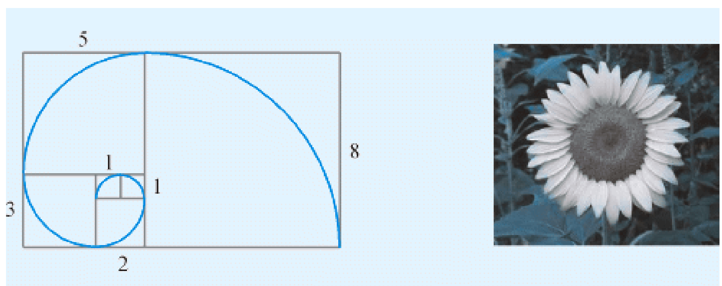


图 12－3－8

等角螺线因它的性质而得名，因为在等角螺线中，自某一个定点画出的每一条射线与等角螺线相交成等角.

等角螺线在自然界中也是随处可见，如蜘蛛网、向日葵的种子排列形式（另外，向日葵花瓣依两个相反的螺旋形排列，朝一个螺旋方向生长的花瓣数同朝相反的螺旋方向生长的花瓣数，几乎总等于斐波那契数列中两个相邻的数）、水流的漩涡、蜗牛壳的螺纹以及星系内星球的分布等.

斐波那契数列最值得注意的性质是：相邻两数的比交替地大于或小于黄金比 $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618\right)$，并且该比值无限趋近于黄金比：

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{1}{2}=0.5,\ \frac{2}{3}=0.667,\ \frac{3}{5}=0.6,$$

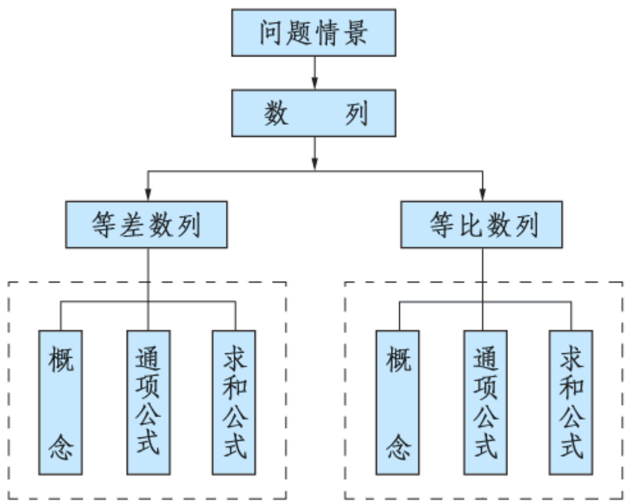
$$\frac{5}{8}=0.625,\ \frac{8}{13}=0.615,\ \frac{13}{21}=0.619,\ \frac{21}{34}=0.618.$$

在研究斐波那契数列的过程中，人们发现了许多意想不到的结果. 由此可见，数学世界是多么的有趣！

有关斐波那契数列的更多内容请访问 http://www.1088.com.cn/math/005.

本章回顾

本章我们从一些有趣的数列模型引入了数列的概念，体会了用数列这一特殊的函数描述变量变化规律的基本思想. 通过实例使同学们经历了建立等差数列和等比数列这两个数列模型的过程，探索了它们的一些基本数量关系——通项公式和前 n 项和的公式，并运用等差数列和等比数列解决了一些实际问题.



在本章学习中，要掌握等差数列与等比数列的定义、通项公式以及前 n 项和公式，会用函数的观点理解数列的概念，能通过相应的函数及其图象直观地认识数列的性质.

学会运用类比的方法认识等差数列和等比数列之间的区别和联系，要善于运用等价转化的思想，将一些特殊的数列问题转化为等差数列或等比数列的相应问题.

复 习 题

感受·理解

1. 若一直角三角形的三边长组成公差为 3 的等差数列，则此三边长分别为(　　).

A. 5，8，11　　B. 9，12，15

C. 10，13，16　　D. 15，18，21

2. 设$\{a_n\}$是等比数列，有下列四个命题：

① $\{a_n^2\}$是等比数列；　② $\{a_na_{n+1}\}$是等比数列；

③ $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等比数列；　④ $\{\lg|a_n|\}$是等比数列.

其中正确命题的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 写出下列数列的通项公式：

(1) $1,\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{5}{9},\ \dfrac{7}{16}$；　(2) $\dfrac{2}{1\times3},\ \dfrac{4}{3\times5},\ \dfrac{6}{5\times7},\ \dfrac{8}{7\times9}$；

(3) 11，101，1 001，10 001；　(4) $\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9},\ -\dfrac{8}{81}$.

4. 若四个数依次成等差数列，且四个数的平方和为 94，首尾两数之积比中间两数之积少 18，求此等差数列.

5. 据美国学者詹姆斯·马丁的测算，在近十年，人类知识总量已达到每三年翻一番，到 2020 年甚至要达到每 73 天翻一番的空前速度. 因此，基础教育的任务已不是教会一切人一切知识，而是让一切人学会学习. 已知 2001 年底，人类知识总量为 a，假如从 2001 年底到 2009 年底是每三年翻一番，从 2009 年底到 2019 年底是每一年翻一番，2020 年是每 73 天翻一番. 试回答：

(1) 2009 年底人类知识总量是多少？

(2) 2019 年底人类知识总量是多少？

(3) 2020 年按 365 天计算，2020 年底人类知识总量是多少？

6. 甲、乙两人同时到银行各存 1 万元，但两人选择的存款方式不同. 甲存 5 年定期储蓄，年利率 2.88%. 乙存一年定期储蓄，年利率 2.55%，并在每一年到期时将本息续存一年定期. 按规定每次计息时，储户须交纳利息的 20% 作为利息税. 若存满 5 年后两人同时从银行取出存款，那么谁获利较多？

7. (1) 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，求前 n 项的和；

(2) 已知数列$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，求前 n 项的和.

思考·运用

8. 等差数列$\{a_n\}$中，前 m 项(m 为奇数)和为 77，其中偶数项之和为 33，且 $a_1-a_m=18$，求通项公式.

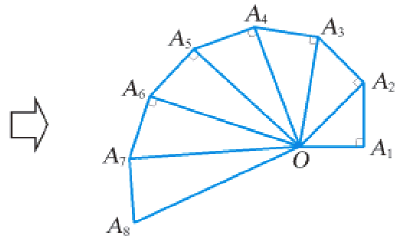
9. 利用等比数列的前 n 项和的公式证明

$$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+b^n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b},$$

其中 $n\in\mathbf{N}^*$，a，b 是不为 0 的常数，$a\neq b$.

10. 图(1)是第七届国际数学教育大会(ICME－7)的会徽图案，它是由一串直角三角形演化而成的(如图(2))，其中 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=1$，它可以形成近似的等角螺线. 记 OA_1，OA_2，…，OA_8 的长度所组成的数列为 $\{a_n\}(n\in \mathbf{N}^*，1\leqslant n\leqslant 8)$.

图(1)



图(2)

(第 10 题)

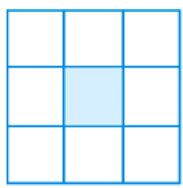
(1) 写出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

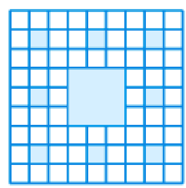
(2) 如果把图(2)的直角三角形继续作下去，那么 $OA_{2\,008}$ 的长为多少？

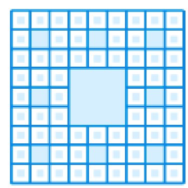
11. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $S_p=q$，$S_q=p\ (p\neq q)$，求 S_{p+q} 的值.

探究 · 拓展

12. 一个正方形被等分成九个相等的小正方形，将中间的一个正方形挖掉(如图(1))；再将剩余的每个正方形都分成九个相等的小正方形，并将中间的一个正方形挖掉，得图(2)；如此继续下去……


(1)


(2)


(3)

(第 12 题)

(1) 图(3)共挖掉了多少个正方形？

(2) 第 n 个图共挖掉了多少个正方形？这些正方形的面积和为多少？

第 13 章　不 等 式

- 不等式
  - 不等关系
  - 一元二次不等式
  - 二元一次不等式组与简单的线性规划问题
    - 二元一次不等式表示的平面区域
    - 二元一次不等式组表示的平面区域
    - 简单的线性规划问题
  - 基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$
    - 基本不等式的证明
    - 基本不等式的应用

我们欣赏数学，我们需要数学.

——陈省身

在现实世界和日常生活中，存在着大量的不等关系，不等式是刻画不等关系的数学模型.

我们已利用不等式的基本性质求得一元一次不等式 $ax+b>0$ **的解集，同时，研究了一元一次不等式** $ax+b>0$ **与一次函数** $y=ax+b$ **及一元一次方程** $ax+b=0$ **三者之间的关系.**

当我们面临新的不等式时，例如，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$**、二元一次不等式** $ax+by+c>0$ **等，我们自然会想到，曾经用过的数学思想方法还能继续运用吗？**

- **怎样求不等式** $ax^2+bx+c>0$ **及** $ax+by+c>0$ **的解集？**
- **不等式** $ax^2+bx+c>0$ **及** $ax+by+c>0$ **有怎样的实际应用？**

13.1 不等关系

在日常生活、生产实际和科学研究中经常要进行大小、多少、高低、轻重、长短和远近的比较，反映在数量关系上就是相等与不等两种情况. 例如：

(1) 某博物馆的门票每位 10 元，20 人以上(含 20 人)的团体票 8 折优惠. 那么不足 20 人时，应该选择怎样的购票策略？

(2) 某杂志以每本 2 元的价格发行时，发行量为 10 万册. 经过调查，若价格每提高 0.2 元，发行量就减少 5 000 册. 要使杂志社的销售收入大于 22.4 万元，每本杂志的价格应定在怎样的范围内？

(3) 下表给出了 X，Y，Z 三种食物的维生素含量及成本：

	维生素 A (单位/kg)	维生素 B (单位/kg)	成　本 (元/kg)
X	300	700	5
Y	500	100	4
Z	300	300	3

某人欲将这三种食物混合成 100 kg 的食品，要使混合食品中至少含 35 000 单位的维生素 A 及 40 000 单位的维生素 B，设 X，Y 这两种食物各取 x kg，y kg，那么 x，y 应满足怎样的关系？

● 用怎样的数学模型刻画上述问题？

在问题(1)中，设 x 人($x<20$)买 20 人的团体票不比普通票贵，则有

$$8\times 20\leqslant 10x.$$

在问题(2)中，设每本杂志价格提高 x 元，则发行量减少

$$0.5\times\frac{x}{0.2}=\frac{5x}{2}$$

万册，杂志社的销售收入为 $(2+x)\left(10-\frac{5x}{2}\right)$ 万元.

根据题意，得

$$(2+x)\left(10-\frac{5x}{2}\right)>22.4,$$

化简，得

$$5x^2-10x+4.8<0.$$

在问题(3)中，因为食物 X，Y 分别为 x kg，y kg，故食物 Z 为 $(100-x-y)$kg，则有

$$\begin{cases}300x+500y+300(100-x-y)\geqslant 35\,000,\\700x+100y+300(100-x-y)\geqslant 40\,000,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}y\geqslant 25,\\2x-y\geqslant 50.\end{cases}$$

上面的例子表明，我们可以用不等式(组)来刻画不等关系.

思　考

你能再举一些实际生活中蕴涵不等关系或不等式的例子吗？

练　习

将下列问题转化为数学模型(不求解)：

1. 某种植物适宜生长在温度为 18℃～20℃ 的山区. 已知山区海拔每升高 100 m，气温下降 0.55℃. 现测得山脚下的平均气温为 22℃，该植物种在山区多高处为宜？
2. 某商品进货单价为 40 元，若按 50 元一个销售，能卖出 50 个. 若销售单价每涨 1 元销售量就减少一个，为了获得最大利润，该商品的最佳售价为多少元？
3. 某化工厂制定明年某产品的生产计划，受下面条件的制约：生产此产品的工人数不超过 200 人；每个工人年工作约计 2 100 h；预计此产品明年销售量至少 80 000 袋；每袋需用 4 h；每袋需用原料 20 kg；年底库存原料 600 t，明年可补充 1 200 t.

   试根据这些数据预测明年的产量.

13.2 一元二次不等式

在上节问题(2)中,我们得到不等式 $5x^2-10x+4.8<0$,像这样只含有一个未知数,并且未知数最高次数是 2 的不等式叫做**一元二次不等式**.

我们知道,一元二次方程和相应的二次函数有着密切的联系,一元二次方程的根就是相应二次函数的图象与 x 轴交点的横坐标.那么

● 一元二次不等式和相应的二次函数是否也有内在的联系?

观察图 13-2-1,可以看出,一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集就是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象(抛物线)位于 x 轴上方的点所对应的 x 值的集合.

因此,求解一元二次不等式可以先解相应的一元二次方程,确定抛物线与 x 轴的交点坐标,再根据图象写出不等式的解集.

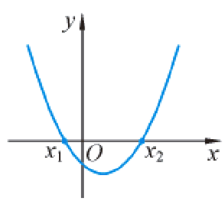


图 13-2-1

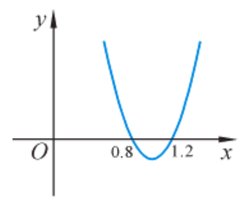


图 13-2-2

下面我们求解不等式 $5x^2-10x+4.8<0$.

第一步 解方程 $5x^2-10x+4.8=0$,得 $x_1=0.8$, $x_2=1.2$;

第二步 画出抛物线 $y=5x^2-10x+4.8$ 的草图(图 13-2-2);

第三步 根据抛物线的图象,可知 $5x^2-10x+4.8<0$ 的解集为

$$\{x \mid 0.8<x<1.2\}.$$

上例表明,根据抛物线及它与 x 轴的交点,就可以确定相应的一元二次不等式的解集.

例 1 解下列不等式:

(1) $x^2-7x+12>0$; (2) $-x^2-2x+3\geqslant 0$;

(3) $x^2-2x+1<0$; (4) $x^2-2x+2<0$.

解 (1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的解为

$$x_1=3,\ x_2=4.$$

根据 $y=x^2-7x+12$ 的图象(图 13-2-3(1)),可得原不等式 $x^2-7x+12>0$ 的解集是$\{x \mid x<3$ 或 $x>4\}$.

对于二次项系数为负数的不等式,可以先把二次项系数化成正数,然后再求解.

(2) 不等式两边同乘以 -1,原不等式可化为

$$x^2+2x-3\leqslant 0.$$

方程$x^2+2x-3=0$ 的解为

$$x_1=-3,\ x_2=1.$$

根据 $y=x^2+2x-3$ 的图象(图13-2-3(2)),可得原不等式 $-x^2-2x+3\geqslant 0$ 的解集是$\{x \mid -3\leqslant x\leqslant 1\}$.

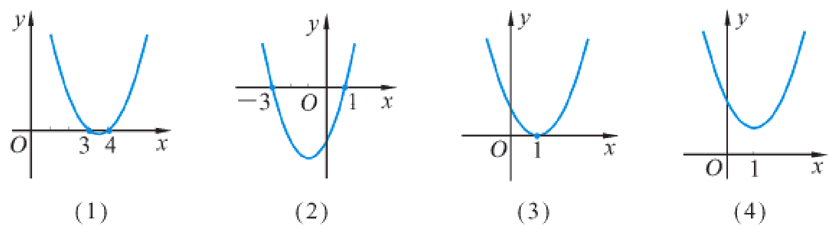


图 13-2-3

(3) 方程 $x^2-2x+1=0$ 有两个相同的解

$$x_1=x_2=1.$$

根据 $y=x^2-2x+1$ 的图象(图 13-2-3(3)),可得原不等式 $x^2-2x+1<0$ 的解集为 $\varnothing$.

(4) 因为 $\Delta<0$,所以方程$x^2-2x+2=0$ 无实数解,根据$y=x^2-2x+2$ 的图象(图13-2-3(4)),可得原不等式$x^2-2x+2<0$的解集为 $\varnothing$.

求解一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0\ (a>0)$ 的过程,可用图 13-2-4 所示的流程图来描述.

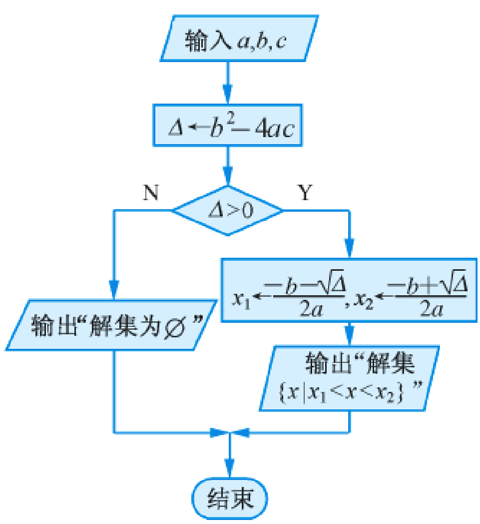
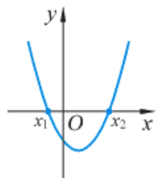
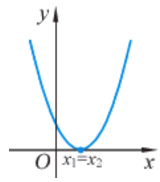
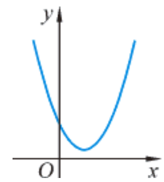


图 13-2-4

思　考

对于不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a<0)$，仿上设计它的求解流程图. 对于一般的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$，它的求解流程图又是怎样的？

一般地，当 $a>0$ 时，我们有：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根	有两相异实根 $x_1,\ x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象	 	 	
$ax^2+bx+c>0$ 的解集	$(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$	$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$	**R**
$ax^2+bx+c<0$ 的解集	$(x_1,\ x_2)$	$\varnothing$	$\varnothing$

练　习

1. 不等式 $(x-1)(x-3)>0$ 的解集为(　　).

   A. $\{x\mid x<1\}$　　B. $\{x\mid x>3\}$

   C. $\{x\mid x<1$ 或 $x>3\}$　　D. $\{x\mid 1<x<3\}$

2. 解下列不等式：

   (1) $2x^2-5x+3<0$；　　(2) $3x^2-x-4>0$；

   (3) $2x^2+4x+3>0$；　　(4) $9x^2-6x+1\leqslant 0$.

3. 解下列不等式：

   (1) $-6x^2-x+2<0$；　　(2) $1-4x^2>4x+2$；

   (3) $1-3x<x^2$；　　(4) $(x-2)(x+2)>1$.

4. x 是什么实数时，函数 $y=-x^2+5x+14$ 的值是：

   (1) 0；　　(2) 正数；　　(3) 负数.

例 2　用一根长为 100 m 的绳子能围成一个面积大于 600 m² 的矩形吗？当长、宽分别为多少米时，所围成的矩形的面积最大？

解　设矩形的一边长为 x(m)，则另一边的长为 $50-x$(m)，$0<x<50$. 由题意，得

$$x(50-x)>600,$$

即

$$x^2-50x+600<0.$$

解得

$$20<x<30.$$

所以，当矩形的一边长在 $(20,\ 30)$ 的范围内取值时，能围成一个面积大于 600 m² 的矩形.

用 S 表示矩形的面积，则

$$S=x(50-x)$$
$$=-(x-25)^2+625\ (0<x<50).$$

当 $x=25$ 时，S 取得最大值，此时 $50-x=25$. 即当矩形长、宽都为 25 m 时，所围成的矩形的面积最大.

例 3 某小型服装厂生产一种风衣，日销货量 x 件与货价 p（元/件）之间的关系为 $p=160-2x$，生产 x 件所需成本为 $C=500+30x$ 元，问：该厂日产量多大时，日获利不少于 1 300 元？

解 由题意，得

$$(160-2x)x-(500+30x)\geqslant 1\,300,$$

化简得

$$x^2-65x+900\leqslant 0,$$

解之得

$$20\leqslant x\leqslant 45.$$

因此，该厂日产量在 20 件至 45 件时，日获利不少于 1 300 元.

例 4 汽车在行驶中，由于惯性的作用，刹车后还要继续向前滑行一段距离才能停住，我们称这段距离为“刹车距离”. 刹车距离是分析事故的一个重要因素.

在一个限速为 40 km/h 的弯道上，甲、乙两辆汽车相向而行，发现情况不对，同时刹车，但还是相碰了. 事后现场勘查测得甲车的刹车距离略超过 12 m，乙车的刹车距离略超过 10 m，又知甲、乙两种车型的刹车距离 s(m)与车速 x(km/h)之间分别有如下关系：

一般来说，刹车距离与车速是二次函数关系.

$$s_{甲}=0.1x+0.01x^2,\quad s_{乙}=0.05x+0.005x^2.$$

问：甲、乙两车有无超速现象？

分析 根据汽车的刹车距离可以估计汽车的车速.

解 由题意知，对于甲车，有

$$0.1x+0.01x^2>12,$$

即

$$x^2+10x-1\,200>0,$$

解得 $x>30$ 或 $x<-40$（不合实际意义，舍去），这表明甲车的车速超过 30 km/h. 但根据题意刹车距离略超过 12 m，由此估计甲车车速不会超过限速 40 km/h.

对于乙车，有

$$0.05x+0.005x^2>10,$$

即

$$x^2+10x-2\ 000>0,$$

解得 $x>40$ 或 $x<-50$（不合实际意义，舍去），这表明乙车的车速超过 40 km/h，超过规定限速.

练　习

1. 某厂扩建后计划后年的产量不低于今年的 2 倍，那么明、后两年每年的平均增长率至少是多少？
2. 国家为了加强对烟酒生产的宏观管理，实行征收附加税政策. 已知某种酒每瓶 70 元，不加收附加税时，每年大约销售 100 万瓶；若政府征收附加税，每销售 100 元要征税 R 元（叫做税率 $R\%$），则每年的销售量将减少 $10R$ 万瓶. 要使每年在此项经营中所收取的附加税不少于 112 万元，R 应怎样确定？

习题 13.2

感受・理解

1. 解下列一元二次不等式：

(1) $3x^2-7x+2>0$；　　(2) $-2x^2-x+6\geqslant 0$；

(3) $x(x-1)\leqslant 0$；　　(4) $x^2+x+1>0$.

2. 解下列一元二次不等式：

(1) $2x^2-3x>2$；　　(2) $3x^2-5x+4>0$；

(3) $x(x+2)<x(3-x)+1$；　　(4) $(3x-1)(x+1)>4$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\lg(x^2-3x+2)$；　　(2) $y=\sqrt{12+x-x^2}$.

4. 造一个高为 20 cm 的长方体容器，底面矩形的长比宽多 10 cm，并且容积不少于 4 000 cm^3. 问：底面矩形的宽至少应为多少？

思考・运用

5. (1) k 是什么实数时，方程 $x^2+2(k-1)x+3k^2-11=0$ 有两个不相等的实数根？

(2) 已知不等式 $x^2-2x+k^2-1>0$ 对一切实数 x 恒成立，求实数 k 的取值范围.

6. 已知不等式 $ax^2+bx-1>0$ 的解集是 $\{x\mid 3<x<4\}$，求实数 a,b 的值.
7. 已知汽车从刹车到停车所滑行的距离 s(m) 与速度 v(km/h) 的平方及汽车的总重量 a(t) 的乘积成正比. 设某辆卡车不装货物以 50 km/h 行驶时，从刹车到停车滑行了 20 m. 如果这辆车装载着与车身相等重量的货物行驶，并与前面的车辆距离为 15 m，为了保证在前面车辆紧急停车时不与前面车辆相撞，那么最大车速是多少？（假定卡车司机从发现前面车辆停车到自己刹车需耽搁 1 s，答案精确到 1 km/h.）

探究・拓展

8. （阅读题）重新考察不等式 $5x^2-10x+4.8<0$. 这个不等式的左边可分解因式为 $(x-1.2)(5x-4)$. 根据实数乘法的符号法则，问题可归结为求一元一次不等式组

$$(1)\begin{cases}x-1.2<0,\\5x-4>0\end{cases} \quad \text{和} \quad (2)\begin{cases}x-1.2>0,\\5x-4<0\end{cases}$$

的两个解集的并集. 不等式组(1)**的解为** $0.8<x<1.2$, **不等式组**(2)**无解. 所以不等式** $5x^2-10x+4.8<0$ **的解集为** $\{x \mid 0.8<x<1.2\}$.

试用上述方法解下面的不等式:

(1) $(2x-3)(x+1)>0$;

(2) $(1-x)(2+x)\geqslant 0$;

(3) $\dfrac{x-1}{x+3}<0$;

(4) $\dfrac{1-2x}{x+4}\leqslant 0$.

13.3 二元一次不等式组与简单的线性规划问题

我们先考察生产中遇到的一个问题：

某工厂生产甲、乙两种产品，生产 1 t 甲种产品需要 A 种原料 4 t、B 种原料 12 t，产生的利润为 2 万元；生产 1 t 乙种产品需要 A 种原料 1 t、B 种原料 9 t，产生的利润为 1 万元．现有库存 A 种原料 10 t、B 种原料 60 t，如何安排生产才能使利润最大？

为理解题意，可以将已知数据整理成下表：

	A 种原料(t)	B 种原料(t)	利　润(万元)
甲种产品(1 t)	4	12	2
乙种产品(1 t)	1	9	1
现有库存(t)	10	60	

设计划生产甲、乙两种产品的吨数分别为 x，y，根据题意，A，B 两种原料分别不得超过 10 t 和 60 t，即

$$\begin{cases}4x+y\leqslant 10,\\12x+9y\leqslant 60,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}4x+y\leqslant 10, & (1)\\4x+3y\leqslant 20. & (2)\end{cases}$$

这是一个**二元一次不等式组**(simultaneous binary linear inequalities)．此外，产量不可能是负数，所以

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0. \qquad (3)$$

于是，上述问题转化为如下的一个数学问题：在约束条件

$$\begin{cases}4x+y\leqslant 10,\\4x+3y\leqslant 20,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0\end{cases}$$

下，求出 x，y，使利润(万元)

这是一个含有两个变量 x 和 y 的函数，称为目标函数.

$$P = 2x + y$$

达到最大.

● 如何解决这个问题？

13.3.1 二元一次不等式表示的平面区域

我们分两步求解上面的问题：

第一步 研究问题中的约束条件，确定数对 (x, y) 的范围；

第二步 在第一步得到的数对 (x, y) 的范围中，找出使 P 达到最大的数对 (x, y).

先讨论第一步.

如图 13-3-1(1)，直线 l：$4x + y = 10$ 将平面分成上、下两个半平面区域，直线 l 上的点的坐标满足方程 $4x + y = 10$，即 $y = 10 - 4x$，直线 l 上方的平面区域中的点的坐标满足不等式 $y > 10 - 4x$，直线 l 下方的平面区域中的点的坐标满足不等式 $y < 10 - 4x$.

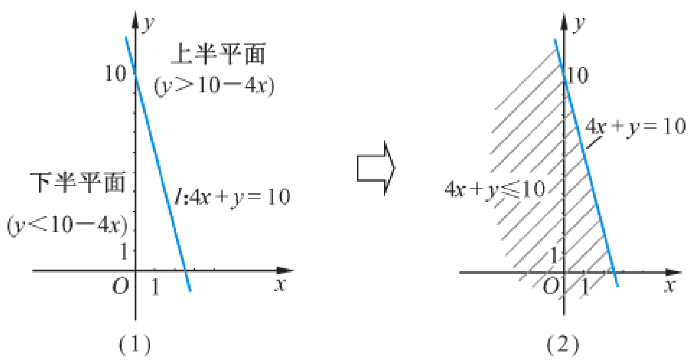


图 13-3-1

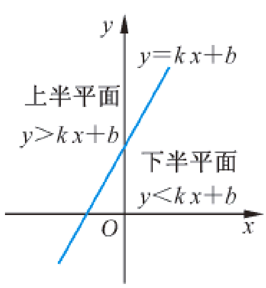


图 13-3-2

因此，$4x + y \leqslant 10$ 在平面上表示的是直线 l 及直线 l 下方的平面区域，即图 13-3-1(2) 中的阴影部分（包括边界直线 l）.

一般地，直线 $y = kx + b$ 把平面分成两个区域（图 13-3-2）：

$y > kx + b$ 表示直线上方的平面区域；

$y < kx + b$ 表示直线下方的平面区域.

思 考

对于二元一次不等式 $Ax + By + C > 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$，如何确定其所在的平面区域？

例 1 画出下列不等式所表示的平面区域：

(1) $y > -2x + 1$； (2) $x - y + 2 > 0$.

解 (1)，(2)两个不等式所表示的平面区域如图 13-3-3(1)，(2)所示.

对于不含边界的区域，要将边界画成虚线.

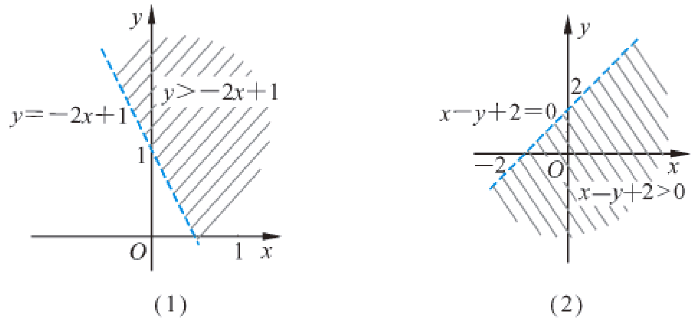


图 13－3－3

例 2 将下列各图中的平面区域（阴影部分）用不等式表示出来（图 13－3－4(1)中的区域不包括 y 轴）：

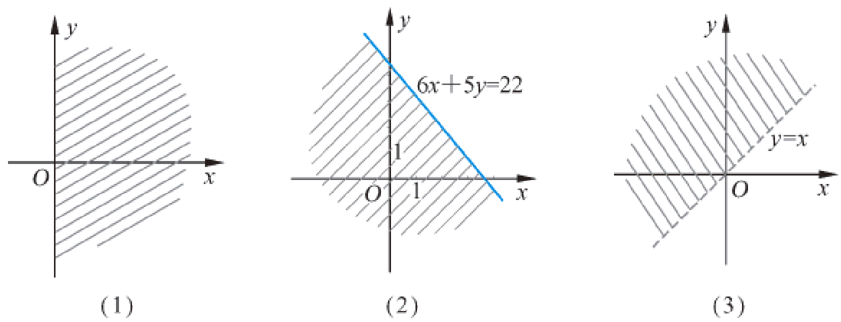


图 13－3－4

解 (1) $x>0$.

(2) $6x+5y\leqslant 22$.

(3) $y>x$.

若直线不过原点，通常选择原点代入检验.

确定二元一次不等式所表示的平面区域有多种方法，常用的一种方法是“选点法”：任选一个不在直线上的点，检验它的坐标是否满足所给的不等式，若适合，则该点所在的一侧即为不等式所表示的平面区域；否则，直线的另一侧为所求的平面区域.

练 习

1. 判断下列命题是否正确：

(1) 点(0，0)在平面区域 $x+y\geqslant 0$ 内；

(2) 点(0，0) 在平面区域 $x+y+1<0$ 内；

(3) 点(1，0) 在平面区域 $y>2x$ 内；

(4) 点(0，1) 在平面区域 $x-y+1>0$ 内.

2. 不等式 $x+4y-9\geqslant 0$ 表示直线 $x+4y-9=0$ (　　).

A. 上方的平面区域　　B. 下方的平面区域

C. 上方的平面区域（包括直线）　　D. 下方的平面区域（包括直线）

3. 用“上方”或“下方”填空：

(1) 若 $B>0$，

不等式 $Ax+By+C>0$ 表示的区域在直线 $Ax+By+C=0$ 的______，

不等式 $Ax+By+C<0$ 表示的区域在直线 $Ax+By+C=0$ 的______；

(2) 若 $B<0$，

不等式 $Ax+By+C>0$ 表示的区域在直线 $Ax+By+C=0$ 的______，

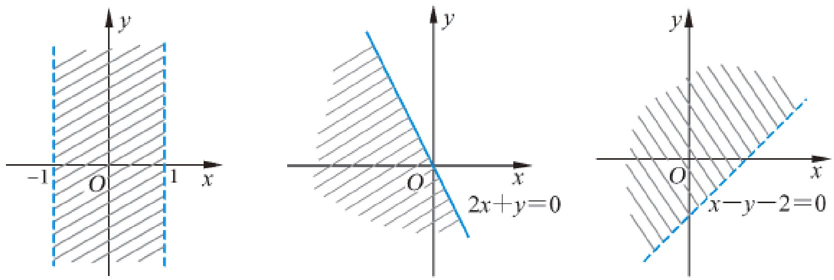
不等式 $Ax+By+C<0$ 表示的区域在直线 $Ax+By+C=0$ 的______.

4. 画出下列不等式所表示的平面区域：

(1) $y\leqslant x-1$；　　(2) $y<0$；

(3) $3x-2y+6>0$；　　(4) $x>2$.

5. 将下列各图中的平面区域(阴影部分)用不等式表示出来：



(1)　　(2)　　(3)

(第 5 题)

13.3.2　二元一次不等式组表示的平面区域

我们已经知道，二元一次不等式 $4x+y\leqslant 10$ 表示的是直线 $4x+y=10$ 及直线下方的平面区域，那么，

● 二元一次不等式组

$$\begin{cases}4x+y\leqslant 10, & (1)\\ 4x+3y\leqslant 20 & (2)\end{cases}$$

表示怎样的几何意义？

根据前面的讨论，(1)和(2)在平面直角坐标系中分别表示两个平面区域，因此，同时满足这两个不等式的点(x, y)的集合就是这两个平面区域的公共部分(图 13－3－5).

图13－3－6 表示的平面区域实际上是图 13－3－5 的阴影区域在第一象限内的部分(包括边界).

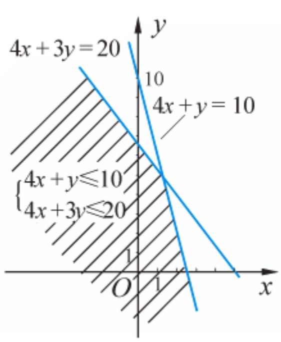


图 13－3－5

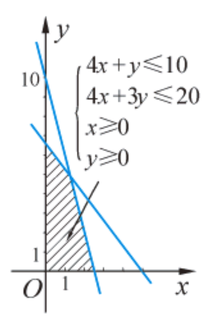


图 13－3－6

如果再加上约束条件

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \tag{3}$$

那么,它们的公共区域为图 13-3-6 中的阴影区域(包括边界).

例 1 画出下列不等式组所表示的平面区域:

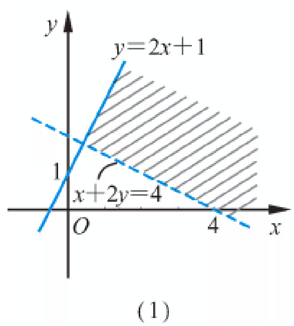
(1) $\begin{cases} y \leqslant 2x+1, \\ x+2y>4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ 4x+3y-8<0. \end{cases}$

解 (1) 不等式 $y \leqslant 2x+1$ 表示直线 $y=2x+1$ 及直线下方的平面区域;

不等式 $x+2y>4$ 表示直线 $x+2y=4$ 上方的平面区域.

所以,这两个平面区域的公共部分,就是原不等式组所表示的平面区域(图 13-3-7(1)).

(2) 原不等式组所表示的平面区域即为不等式 $4x+3y-8<0$ 所表示的平面区域位于第一象限内的部分(图 13-3-7(2)).



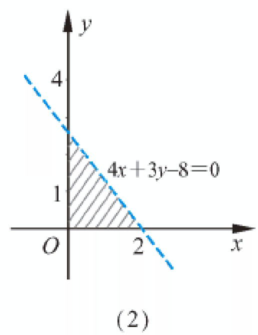


图 13-3-7

思考

如何寻找满足例 1(2)中不等式组的整数解?

例 2 如图 13-3-8,$\triangle ABC$ 三个顶点坐标为 $A(0,4)$,$B(-2,0)$,$C(2,0)$,求$\triangle ABC$ 内任一点 (x,y) 所满足的条件.

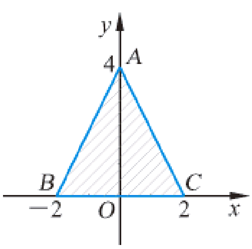


图 13-3-8

解 写出$\triangle ABC$ 三边所在的直线方程:

AB: $2x-y+4=0$;

AC: $2x+y-4=0$;

BC: $y=0$.

$\triangle ABC$ 内任意一点(x,y)都在直线 AB,AC 的下方,且在直线 BC 的上方,故(x,y)满足的条件为

$$\begin{cases} 2x-y+4>0, \\ 2x+y-4<0, \\ y>0. \end{cases}$$

练　习

坐标为整数的点叫做整点.

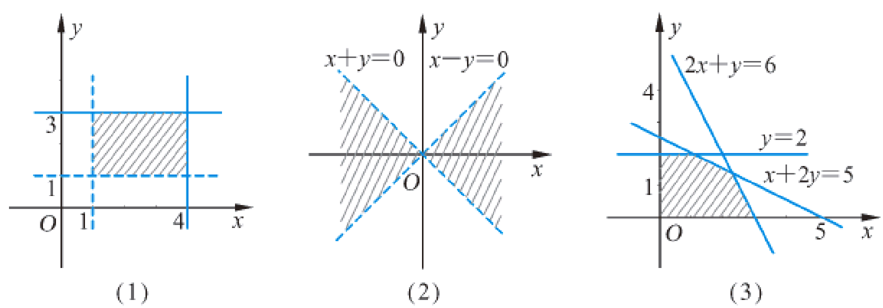
1. 二元一次不等式组 $\begin{cases} x<0, \\ y<0, \\ x+y+3>0 \end{cases}$ 表示的平面区域内的整点坐标为________.

2. 不等式组 $\begin{cases} x-y+5\geqslant 0, \\ x+y\geqslant 0, \\ x\leqslant 3 \end{cases}$ 表示的平面区域的面积为________.

3. 画出下列不等式组所表示的平面区域：

(1) $\begin{cases} 3x+5y\leqslant 20, \\ 5x+4y\leqslant 25, \\ x\geqslant 1, \\ y\geqslant 1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 0<x\leqslant 50, \\ 0<y\leqslant 30, \\ x+y\geqslant 40, \\ 3x+4y\leqslant 200. \end{cases}$

4. 用不等式组表示下列各图中的阴影区域(图(3)中的区域包括边界)：



(第 4 题)

13.3.3　简单的线性规划问题

现在，我们来完成第 13.3 节开始提出的问题，即

● 在约束条件

$$\begin{cases} 4x+y\leqslant 10, \\ 4x+3y\leqslant 20, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

下，如何探求目标函数 $P=2x+y$ 的最大值？

首先，作出约束条件所表示的平面区域，这一区域称为**可行域**(feasible region)，如图 13-3-9(1).

其次，考虑目标函数 $P=2x+y$ 的几何意义.

将目标函数 $P=2x+y$ 变形为 $y=-2x+P$，它表示斜率为 -2，在 y 轴上的截距为 P 的一条直线.

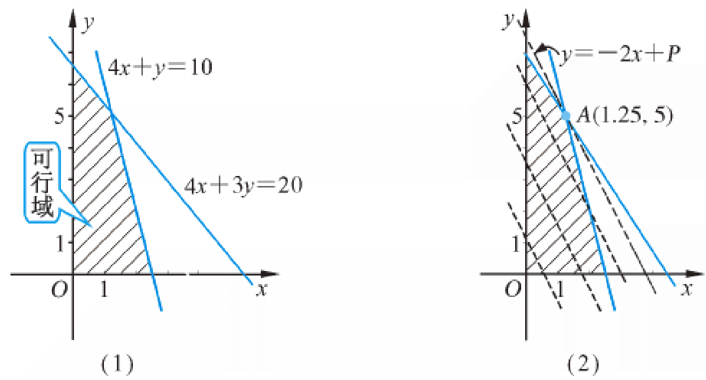


图 13－3－9

平移直线 $y=-2x+P$(图 13－3－9(2)中虚线)时,直线必须经过可行域.

平移直线 $y=-2x+P$,当它经过两直线 $4x+y=10$ 与 $4x+3y=20$ 的交点 $A(1.25,\ 5)$ 时,直线在 y 轴上的截距 P 最大(图 13－3－9(2)).

因此,当 $x=1.25$,$y=5$ 时,目标函数取得最大值 $2\times1.25+5=7.5$,即甲、乙两种产品分别生产 1.25 t 和 5 t 时,可获得最大利润 7.5 万元.

这类求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题,通常称为**线性规划**(linear program)问题. 上述只含有两个变量的简单线性规划问题可用图解法来解决.

线性规划是一种重要的优化模型,生产实际中有许多问题都可以归结为线性规划问题.

例 1 投资生产 A 产品时,每生产一百吨需要资金 200 万元,需场地 200 m^2,可获利润 300 万元;投资生产 B 产品时,每生产一百米需要资金 300 万元,需场地 100 m^2,可获利润 200 万元. 现某单位可使用资金 1 400 万元,场地 900 m^2,问:应作怎样的组合投资,可使获利最大?

分析 这是一个二元线性规划问题,求解之前,先将题中的数据整理成下表:

	资　金(百万元)	场　地(百平方米)	利　润(百万元)
A 产品(百吨)	2	2	3
B 产品(百米)	3	1	2
限　制	14	9	

然后根据此表设未知数,列出约束条件和目标函数,最后作图求解.

解 设生产 A 产品 x 百吨，生产 B 产品 y 百米，利润为 S 百万元，则约束条件为

$$\begin{cases}2x+3y\leqslant 14,\\2x+y\leqslant 9,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0,\end{cases}$$

目标函数为 $S=3x+2y$.

作出可行域(图 13－3－10)，将目标函数 $S=3x+2y$ 变形为

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{S}{2},$$

这是斜率为 $-\frac{3}{2}$，随 S 变化的一族直线. $\frac{S}{2}$ 是直线在 y 轴上的截距，当 $\frac{S}{2}$ 最大时 S 最大，但直线要与可行域相交.

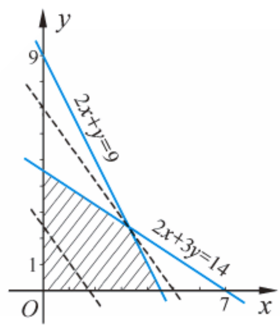


图 13－3－10

由图 13－3－10 知，使 $3x+2y$ 取得最大值的 (x, y) 是两直线 $2x+y=9$ 与 $2x+3y=14$ 的交点 $(3.25, 2.5)$. 此时

$$S=3\times 3.25+2\times 2.5=14.75.$$

答 生产 A 产品 325 t，生产 B 产品 250 m 时，获利最大，且最大利润为 1 475 万元.

对于有实际背景的线性规划问题，可行域通常是位于第一象限内的一个凸多边形区域，此时变动直线的最佳位置一般通过这个凸多边形的顶点.

例 2 某运输公司向某地区运送物资，每天至少运送 180 t. 该公司有 8 辆载重为 6 t 的 A 型卡车与 4 辆载重为 10 t 的 B 型卡车，有 10 名驾驶员. 每辆卡车每天往返次数为 A 型车 4 次，B 型车 3 次. 每辆卡车每天往返的成本费 A 型车为 320 元，B 型车为 504 元. 试为该公司设计调配车辆方案，使公司花费的成本最低.

解 设每天调出 A 型车 x 辆，B 型车 y 辆，公司花费成本 z 元，则约束条件为

$$\begin{cases}x+y\leqslant 10,\\4x\cdot 6+3y\cdot 10\geqslant 180,\\0\leqslant x\leqslant 8,\\0\leqslant y\leqslant 4,\end{cases}$$

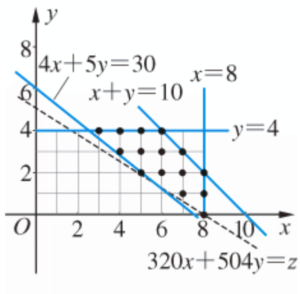


图 13－3－11

要求变量取整数的线性规划称为整数线性规划.

即 $$\begin{cases} x+y\leqslant 10, \\ 4x+5y\geqslant 30, \\ 0\leqslant x\leqslant 8, \\ 0\leqslant y\leqslant 4, \\ x,\ y\in \mathbf{Z} \end{cases}$$

目标函数为 $z=320x+504y$.

作出可行域（图 13－3－11），当直线 $320x+504y=z$ 经过直线 $4x+5y=30$ 与 x 轴的交点 $(7.5,\ 0)$ 时，z 有最小值，由于 $(7.5,\ 0)$ 不是整点，故不是最优解.

由图 13－3－11 可知，经过可行域内的整点，且与原点距离最近的直线是 $320x+504y=2\ 560$，经过的整点是 $(8,\ 0)$，它是最优解.

答 公司每天调出 A 型车 8 辆时，花费的成本最低.

EXCEL

从例 2 的解答我们看到，寻求线性规划问题的整数解有时比较麻烦，而借助计算机求解线性规划问题是一件十分方便的事情. 下面介绍用 Excel 求解前面两例的操作方法.

先看例 1，在约束条件

$$\begin{cases} 2x+3y\leqslant 14, \\ 2x+y\leqslant 9, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

下，求目标函数 $S=3x+2y$ 的最大值.

将单元格 A1，A2 分别看成变量 $x,\ y$.

步骤 1 视单元格 A1，A2 为可变单元格，在单元格 B1，B2 内分别输入约束公式“$=2*\mathrm{A1}+3*\mathrm{A2}$”，“$=2*\mathrm{A1}+\mathrm{A2}$”；在单元格 C1 内输入目标函数“$=3*\mathrm{A1}+2*\mathrm{A2}$”.

步骤 2 选择【工具/规划求解】，在“规划求解参数”对话框的“设置目标单元格”中选择单元格 C1，在“等于”中选择“最大值”，在“可变单元格”中选择区域 A1：A2；单击“添加”，在弹出的对话框中设置约束条件“B1 $\leqslant$ 14，B2 $\leqslant$ 9，A1 $\geqslant$ 0，A2 $\geqslant$ 0”（图 13－3－12）.

约束条件 A1 $\geqslant$ 0，A2 $\geqslant$ 0 也可在“选项”中勾选“假定非负”一次完成.

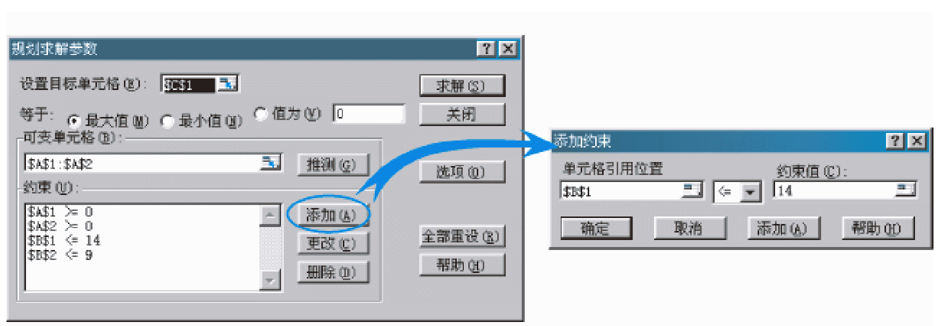


图 13－3－12

如果【工具】菜单中没有【规划求解】命令，可按如下步骤添加：选择【工具/加载宏】，在显示的对话框“当前加载宏”列表中找到【规划求解】选项，将其选中，再单击“确定”即可. 若此法无效，需重装 Excel.

步骤 3 单击“求解”，显示“规划求解结果”对话框(如图 13－3－13)，故当 $x=3.25$(百吨)，$y=2.5$(百米)时，可获最大利润 $S=14.75$(百万).

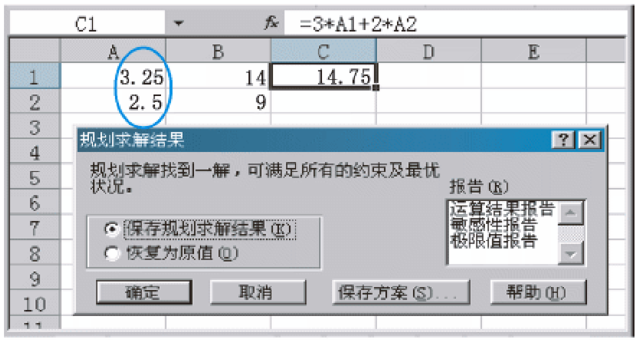


图 13－3－13

对于例 2，只需增加 A1，A2 为整数这一条件，其余操作相仿(如图 13－3－14).

这里的约束条件 $A1\geqslant 0$，$A2\geqslant 0$ 是通过“选项”中勾选“假定非负”完成的.

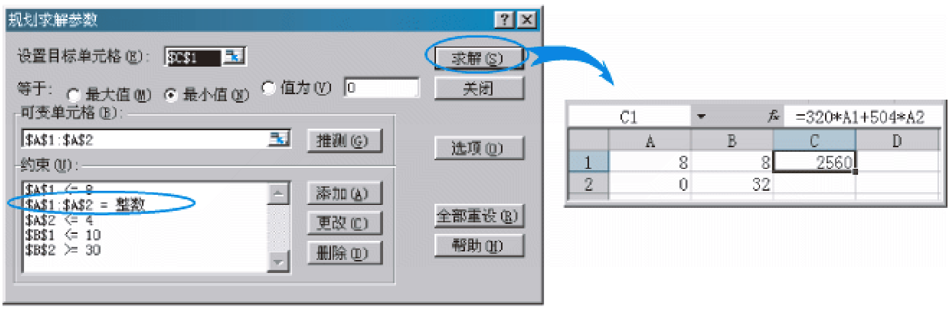


图 13－3－14

对于第 13.3 节开始提出的问题，尝试用 Excel“规划求解”工具进行求解.

练　习

1. 若 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，且 $x+y\leqslant 1$，则 $z=x-y$ 的最大值是(　　).
   A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. -2
2. 若 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 2$，且 $2y-x\geqslant 1$，则 $z=2y-x+4$ 的最小值为(　　).
   A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5
3. 若 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$2x+3y\leqslant 100$，$2x+y\leqslant 60$，则 $z=6x+4y$ 的最大值是________.
4. 某工厂生产甲、乙两种产品，已知生产甲种产品 1 t，需矿石 4 t，煤 3 t，生产乙种产品 1 t，需矿石 5 t，煤 10 t. 每 1 t 甲种产品的利润是 7 万元，每 1 t 乙种产品的利润是 12 万元. 工厂在生产这两种产品的计划中，要求消耗矿石不超过 200 t，煤不超过 300 t，则甲、乙两种产品应各生产多少，能使利润总额达到最大？
5. 对于第 13.1 节中的问题(3)，如果要使成本最低，那么 X，Y，Z 应各取多少千克？

问题与建模

线性规划问题的数学模型

在日常经济活动中，经常会遇到生产规划问题，即如何合理地利

用有限的资源(如资金、劳力、材料、时间等),以使消耗最小,利润最大.

线性规划研究的是线性目标函数在线性约束条件下取最大值或最小值的问题. 一般地,线性规划问题的数学模型是:

已知约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m\leqslant b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m\leqslant b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m\leqslant b_n, \end{cases}$$

其中 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, m)$, $b_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 都是常量,$x_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 是非负变量,求

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m$$

的最大值或最小值,这里 $c_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 是常量.

前面我们已经讨论了两个变量的线性规划问题,这类问题可以用图解法来求最优解. 涉及更多变量的线性规划问题可以用 Excel 来求解.

问题 (合理下料问题)在日常生活和生产实践中,经常会遇到将条材或板材剪裁成规定的几种尺寸的坯料. 如何安排下料,才能既满足要求,又节省用料?

案例 设某车间要做 100 套钢架,每套钢架由长为 2.9 m, 2.1 m, 1.5 m 的圆钢各四根组成. 该车间现有一批 7.4 m 长的圆钢,如何安排下料,可使残料最少?

分析 首先要设计可行的裁剪方案. 例如,用 7.4 m 长的圆钢最多裁出 2.9 m 的圆钢 2 根,余料还可裁出 1.5 m 的圆钢 1 根,此种裁剪方案下的残料为 0.1 m. 仿此,考虑用 7.4 m 长的圆钢裁出 2.9 m 的圆钢 1 根、0 根时的裁剪方案,可得下表:

下料方法 / 下料根数 / 毛坯长度	1	2	3	4	5	6	7	8	毛坯需要量
$l_1=2.9$	2	1	1	1	0	0	0	0	400
$l_2=2.1$	0	2	1	0	3	2	1	0	400
$l_3=1.5$	1	0	1	3	0	2	3	4	400
合计/m	7.3	7.1	6.5	7.4	6.3	7.2	6.6	6.0	
残料/m	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4	

建模 根据上表,设 $x_j(j=1, 2, \cdots, 8)$ 为第 j 种下料方式所用的圆

钢根数，那么约束条件为

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 400, \\ 2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7\geqslant 400, \\ x_1+x_3+3x_4+2x_6+3x_7+4x_8\geqslant 400, \end{cases}$$

其中 $x_j(j=1, 2, \cdots, 8)$ 是非负变量且为整数.

目标函数为残料总长度最小，即求

$$z=0.1x_1+0.3x_2+0.9x_3+1.1x_5+0.2x_6+0.8x_7+1.4x_8$$

的最小值.

Excel 求解 （1）视单元格 A1：A8 为可变单元格；在单元格 B1，B2，B3 内分别输入约束公式

“=2 * A1+A2+A3+A4”，

“=2 * A2+A3+3 * A5+2 * A6+A7”，

“=A1+A3+3 * A4+2 * A6+3 * A7+4 * A8”；

在单元格 C1 内输入目标函数

“=0.1 * A1+0.3 * A2+0.9 * A3+1.1 * A5
+0.2 * A6+0.8 * A7+1.4 * A8”.

（2）选择【工具/规划求解】，在“规划求解参数”对话框的“设置目标单元格”中选择单元格 C1，在“等于”中选择“最小值”，在“可变单元格”中选择区域 A1:A8；单击“添加”，在弹出的对话框中设置约束条件 “$B1\geqslant 400, B2\geqslant 400, B3\geqslant 400$，A1:A8 为整数且非负”（图 13－3－15）.

图 13－3－15

（3）单击“求解”，可得当

$$x_1=x_2=x_3=x_5=x_7=x_8=0, x_4=400, x_6=200$$

时，残料最少，为 40 m.

讨论 上面是以残料最少为最优方案，但消耗的原料总量为 600 根，未必最省（多出的 1 200 根 l_3 也可能成为废料）. 如果我们以用料最少为评价标准，那么目标函数就为

$$z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8,$$

要求 z 的最小值，仿上可得最优解为

此时最优解不惟一.

$x_1=106$，$x_2=134$，$x_3=x_5=x_7=x_8=0$，$x_4=54$，$x_6=66$.

此时用料最省，为 360 根(残料为 64 m).

线性规划问题的一般建模步骤如图 13-3-16 所示.

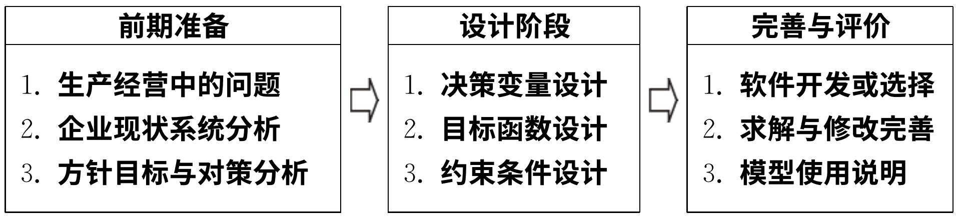


图 13-3-16

希望同学们根据上述建模步骤，到附近的厂矿企业等作调查研究，了解线性规划问题的实际应用，搜集能用线性规划的知识提高生产效率的案例. 再把调查资料或研究成果写成研究报告或小论文，并与同学交流.

习题 13.3

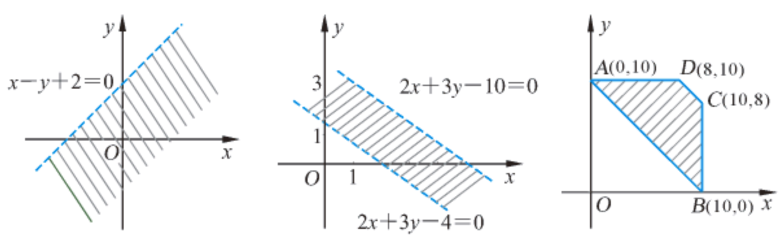
感受·理解

1. 画出下列二元一次不等式(组)所表示的平面区域：

(1) $x+y\leqslant 0$；　　(2) $y<-3x+1$；

(3) $\begin{cases}2x+3y\leqslant 100,\\2x+y\leqslant 60,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}2x+5y\geqslant 10,\\2x-3y\leqslant -6,\\2x+y\leqslant 10.\end{cases}$

2. 将下列各图中的平面区域用二元一次不等式(组)表示出来：



(1)　(2)　(3)

(第 2 题)

3. 写出不等式组

$$\begin{cases}-1<x\leqslant 1,\\-1<y\leqslant 1\end{cases}$$

所表示的平面区域内的整点坐标.

4. 求 $z=2x+y$ 的最大值和最小值，其中 x，y 满足约束条件

$$\begin{cases}x+y-2\geqslant 0,\\x\leqslant 2,\\y\leqslant 2.\end{cases}$$

5. 一家饮料厂商专营甲、乙两种果汁饮料，甲种饮料的主要配方是每 3 份李子汁加 1 份苹果汁，乙种饮料的配方是李子汁和苹果汁各一半. 该厂每天能获得的原料是 2 000 L 李子汁和 1 000 L 苹果汁，又厂方的利润是 1 L 甲种饮料得 3 元，1 L 乙种饮料得 4 元. 那么厂方每天生产甲、乙两种饮料各多少，才能获利最大？

思考·运用

6. 某制药公司有三条生产线生产中成药产品. 公司进行产品结构调整，决定用现有产品生产线的剩余生产能力试生产两种新产品. 新产品的生产方式为批量生产：400 个产品为一批. 目前由于大多数生产设备已用于其他产品的生产，所以首先确定每周生产线可用的生产时间，以及各种产品每批的生产时间，时间单位以小时计. 然后由生产中心确定生产成本，市场中心进行定价，得到两种新产品每一批的利润. 具体数据如下表所示.

生 产 线	每批产品的生产时间(h)		每周生产时间(h)
	产品一	产品二	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
每批利润(千元)	3	5	

试确定这两种产品的生产方式，以使公司每周的利润最大.

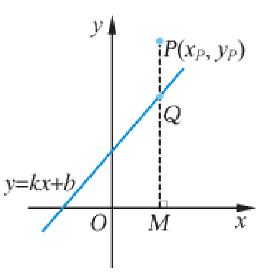
探究·拓展

7. (阅读题) 先阅读：

试证明：二元一次不等式 $y>kx+b$ 表示直线 l：$y=kx+b$ 上方的平面区域.

证明：首先，满足不等式 $y>kx+b$ 的任意一点 $P(x_P, y_P)$（即满足 $y_P>kx_P+b$）都在直线 l：$y=kx+b$ 上方的平面区域内，这是因为：

过 P 点作 $PM\perp x$ 轴，M 为垂足，PM 交 l 于 Q(如图)，则 Q 的纵坐标为 $y_Q=kx_P+b$. 因为 $y_P>kx_P+b=y_Q$，所以点 P 在 Q 的上方，即点 P 在直线 l 的上方.



(第 7 题)

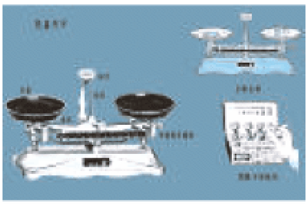
其次，直线 l：$y=kx+b$ 上方的平面区域内的任一点 $P(x_P, y_P)$ 都满足不等式 $y>kx+b$，这是由于 $P(x_P, y_P)$ 在直线 l 的上方，所以 $y_P>y_Q$，即 $y_P>kx_P+b$，这表明 $P(x_P, y_P)$ 满足不等式 $y>kx+b$.

由上可知，不等式 $y>kx+b$ 表示直线 l：$y=kx+b$ 上方的平面区域.

再证明：

若点 $P(x_0, y_0)$ 在直线 l：$Ax+By+C=0\ (B>0)$ 的上方，那么 $Ax_0+By_0+C>0$. 反之亦然.

13.4 基本不等式 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$



把一个物体放在天平的一个盘子上，在另一个盘子上放砝码使天平平衡，称得物体的质量为 a. 如果天平制造得不精确，天平的两臂长略有不同（其他因素不计），那么 a 并非实际质量. 不过，我们可作第二次测量：把物体调换到天平的另一个盘上，此时称得物体的质量为 b. 那么如何合理地表示物体的质量呢？

简单的做法是，把两次称得物体的质量"平均"一下，以

$$A = \frac{a+b}{2}$$

表示物体的质量. 这样的做法合理吗？

设天平的两臂长分别为 l_1，l_2，物体实际质量为 M，根据力学原理有

$$l_1 M = l_2 a, \quad ①$$

$$l_2 M = l_1 b. \quad ②$$

①，② 相乘再除以 $l_1 l_2$，可以得到

$$M = \sqrt{ab}.$$

$\sqrt{ab}$ 是物体的实际质量，它也是正数 a，b 的一种"平均"方式.

一般地，对于正数 a，b，我们把 $\frac{a+b}{2}$ 称为 a，b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 称为 a，b 的几何平均数.

● 两个正数 a，b 的算术平均数和几何平均数之间具有怎样的大小关系？

13.4.1 基本不等式的证明

我们先取一些数作试验：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	a	30	59	92	70	25	11	68	58	11	29	20
2	b	39	99	23	99	54	100	2	11	80	5	20
3	$\sqrt{ab}$	34.21	76.43	46	83.25	36.74	33.17	11.66	25.26	29.66	12.04	20
4	$\frac{a+b}{2}$	34.5	79	57.5	84.5	39.5	55.5	35	34.5	45.5	17	20

计算结果表明

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

也就是说，两个正数的几何平均数不大于它们的算术平均数，当两数相等时两者相等.

下面证明上述结论是正确的.

证法 1

$$\begin{aligned}&\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\\ =&\frac{1}{2}[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}]\\ =&\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

当且仅当 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$，即 $a=b$ 时，取“$=$”号.

证法 2

要证 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$,

只要证 $2\sqrt{ab} \leqslant a+b$,

只要证 $0 \leqslant a-2\sqrt{ab}+b$,

只要证 $0 \leqslant (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

因为最后一个不等式成立，所以 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ 成立，当且仅当 $a=b$ 时取“$=$”号.

证法 3 对于正数 a，b，有

$$\begin{aligned}&(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0,\\ \Rightarrow\ &a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0,\\ \Rightarrow\ &a+b \geqslant 2\sqrt{ab},\\ \Rightarrow\ &\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

当 $a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$ 时，这个不等式仍然成立.

> 如果 a，b 是正数，那么 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$（当且仅当 $a=b$ 时取“$=$”号）.

我们把不等式 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$ 称为基本不等式.

思　考

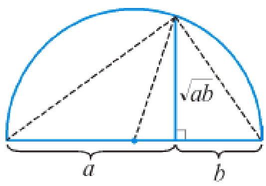


图 13－4－1

根据图 13－4－1，你能给出基本不等式 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ 的几何解释吗？这个不等式还有其他证法吗？

例 1　设 a，b 为正数，证明下列不等式：

（1）$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2$；　　　（2）$a+\frac{1}{a} \geqslant 2$.

证　（1）因为 a，b 为正数，所以 $\frac{b}{a}$，$\frac{a}{b}$ 也为正数，由基本不等式，得

只需 a，b 同号，此式便成立.

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}}=2,$$

所以原不等式成立.

（2）因为 a，$\frac{1}{a}$ 均为正数，由基本不等式，得

$$a+\frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}=2,$$

所以原不等式成立.

例 2　已知函数 $y=x+\frac{16}{x+2}$，$x \in(-2,+\infty)$，求此函数的最小值.

解　因为 $x>-2$，所以 $x+2>0$，由基本不等式，得

$$\begin{aligned} x+\frac{16}{x+2} &= (x+2)+\frac{16}{x+2}-2 \\ &\geqslant 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{16}{x+2}}-2=6, \end{aligned}$$

当且仅当 $x+2=\frac{16}{x+2}$，即 $x=2$ 时，取“$=$”号.

因此，当 $x=2$ 时，函数有最小值 6.

练　习

1. 设 p 为正数，计算下列两个数的算术平均数与几何平均数.

（1）2，8；　　　（2）3，12；

（3）p，$9p$；　　　（4）2，$2p^2$.

2. 证明：

（1）$a^2+b^2 \geqslant 2ab$；　　　（2）$x^2+1 \geqslant 2x$；

（3）$a+\frac{1}{a-1} \geqslant 3\ (a>1)$；　　　（4）$x+\frac{1}{x} \leqslant -2\ (x<0)$.

3. 证明不等式 $\frac{2^a+2^b}{2} \geqslant 2^{\frac{a+b}{2}}$.

4. 求函数 $y=4x^2+\frac{9}{x^2}$ 的最小值，并求函数取最小值时 x 的值.

13.4.2 基本不等式的应用

基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$常用于证明不等式以及求某些函数的最大值或最小值.

例 1 用长为 $4a$ 的铁丝围成一个矩形,怎样才能使所围矩形的面积最大.

解 设矩形长为 x $(0<x<2a)$,则宽为 $2a-x$,矩形面积为

$$S=x(2a-x),$$

且 $x>0,\ 2a-x>0$.

由基本不等式,得

$$\sqrt{x(2a-x)}\leqslant\frac{x+(2a-x)}{2}=a.$$

上式当且仅当 $x=2a-x$,即 $x=a$ 时,取"="号. 由此可知,当 $x=a$ 时,$S=x(2a-x)$ 有最大值 a^2.

答 将铁丝围成正方形时面积最大,最大面积为 a^2.

也可转化为求二次函数 $S=x(2a-x)$ 的最大值.

例 2 某工厂建造一个无盖的长方体贮水池,其容积为 $4\ 800\ \mathrm{m}^3$,深度为 $3\ \mathrm{m}$. 如果池底每 $1\ \mathrm{m}^2$ 的造价为 150 元,池壁每 $1\ \mathrm{m}^2$ 的造价为 120 元,怎样设计水池能使总造价最低?最低总造价为多少元?

解 设总造价为 y 元,池底的一边长为 x m,则另一边长为$\frac{4\ 800}{3x}$m,即$\frac{1\ 600}{x}$m.

$$y=150\left(x\cdot\frac{1\ 600}{x}\right)+2\times 120\times 3\times\left(x+\frac{1\ 600}{x}\right)$$
$$=150\times 1\ 600+720\left(x+\frac{1\ 600}{x}\right).$$

因为 $x+\frac{1\ 600}{x}\geqslant 2\sqrt{1\ 600}=80$(当 $x=40$ 时,取"="号),

所以

$$y\geqslant 150\times 1\ 600+720\times 80=297\ 600(\text{元}).$$

答 当水池设计成底面边长为 40 m 的正方形时,总造价最低,为 297 600 元.

在运用基本不等式时,应注意:

(1) 和 $a+b$ 一定时,积 ab 有最大值(如例 1);积 ab 一定时,和

$a+b$ 有最小值(如例 2).

(2) 取等号的条件$\left(\text{当且仅当 } a=b \text{ 时}, \sqrt{ab}=\dfrac{a+b}{2}\right)$.

例 3 过点(1, 2)的直线 l 与 x 轴的正半轴、y 轴的正半轴分别交于 A,B 两点,当$\triangle AOB$ 的面积最小时,求直线 l 的方程.

解 设点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ $(a, b>0)$,则直线 l 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

由题意,点(1, 2)在此直线上,所以

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1.$$

由基本不等式,得

$$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{ab}} \Rightarrow ab\geqslant 8.$$

于是,$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}ab\geqslant 4$,当且仅当$\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}$,从而 $a=2$, $b=4$ 时,取"="号.

因此,$\triangle AOB$ 的面积最小时,直线 l 的方程为

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1,$$

即

$$2x+y-4=0.$$

例 4 如图 13-4-2,一份印刷品的排版面积(矩形)为 A,它的两边都留有宽为 a 的空白,顶部和底部都留有宽为 b 的空白. 如何选择纸张的尺寸,才能使纸的用量最小?

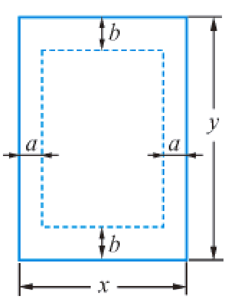


图 13-4-2

解 设纸张的长和宽分别是 x, y,则

$$(x-2a)(y-2b)=A,$$

从而

$$y=\frac{A}{x-2a}+2b.$$

于是纸张的面积为

$$\begin{aligned} S&=xy\\ &=\frac{Ax}{x-2a}+2bx\\ &=\frac{Ax-2Aa+2Aa}{x-2a}+2bx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= A+\frac{2Aa}{x-2a}+2bx\\&=\frac{2Aa}{x-2a}+2b(x-2a)+A+4ab\\&\geqslant 2\sqrt{4Aab}+A+4ab=(\sqrt{A}+2\sqrt{ab})^2,\end{aligned}$$

当且仅当

$$\frac{2Aa}{x-2a}=2b(x-2a),$$

即 $x=\sqrt{\frac{Aa}{b}}+2a$ 时，S 有最小值 $(\sqrt{A}+2\sqrt{ab})^2$，此时

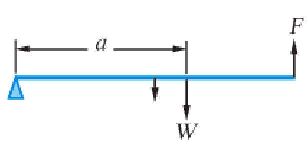
$$y=\frac{A}{x-2a}+2b=\sqrt{\frac{Ab}{a}}+2b.$$

答 纸张的长和宽分别为 $\sqrt{\frac{Aa}{b}}+2a$ 和 $\sqrt{\frac{Ab}{a}}+2b$ 时，纸张的用量最小.

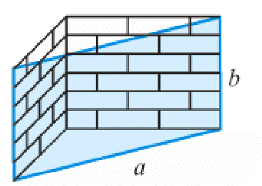
练 习

1. 如果 $\log_3 m+\log_3 n\geqslant 4$，那么 $m+n$ 的最小值是（　　）.

   A. 4　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 9　　D. 18
2. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $2x+5y=20$，求 $\lg x+\lg y$ 的最大值.
3. 将一段圆木制成横截面是矩形的柱子，怎样加工才能使横截面的面积最大？
4. 如图，重量是 W 的重物挂在杠杆上距支点 a 处. 质量均匀的杆子每单位长度的重量为 m. 杠杆应当多长，才能使得加在另一端用来平衡重物的力 F 最小？



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，用一块矩形木板紧贴一墙脚围成一个直三棱柱空间堆放谷物. 已知木板的长为 a，宽为 b $(a>b)$，墙角的两堵墙面和地面两两互相垂直，如何放置木板使这个空间最大？

习题 13．4

感受・理解

1. 求证：$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.
2. 设 $a,b\in(0,+\infty)$，求证：$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$.

3. 求证：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2+1}>1$； (2) $\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}>2$.

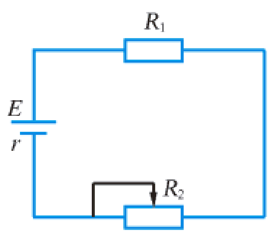
4. 已知函数 $y=\tan\theta+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求函数 y 的最小值.

5. 求证：$a^2+3b^2\geqslant 2b(a+b)$，并指出能否取“=”号.

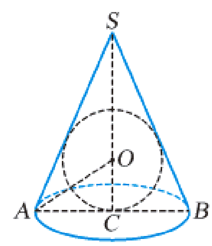
思考·运用

6. 求函数 $y=x+\dfrac{4}{x}$ $(x\neq 0)$ 的值域.

7. 如图，电路中电源的电动势为 E，内电阻为 r，R_1 为固定电阻，R_2 是一个滑动变阻器. R_2 调至何值时，其消耗的电功率 P 最大？最大电功率是多少 $(P=I^2R)$？



(第7题)



(第8题)

8. 如图，半径为 1 的球内切于一个圆锥，当圆锥的底面半径为多少时，圆锥的体积最小？

探究·拓展

9. (阅读题) 甲、乙两同学分别解“$x\in[1,+\infty)$，求函数 $y=2x^2+1$ 的最小值”的过程如下：

甲：$y=2x^2+1\geqslant 2\sqrt{2x^2\times 1}=2\sqrt{2}x$，又 $x\geqslant 1$，所以 $2\sqrt{2}x\geqslant 2\sqrt{2}$.

从而 $y\geqslant 2\sqrt{2}x\geqslant 2\sqrt{2}$，即 y 的最小值是 $2\sqrt{2}$.

乙：因为 $y=2x^2+1$ 在$[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 y 的最小值是 $2\times 1^2+1=3$.

试判断谁错？错在何处？

10. 某种产品的两种原料相继提价，因此，产品生产者决定根据这两种原料提价的百分比，对产品分两次提价，现在有三种提价方案：

方案甲：第一次提价 $p\%$，第二次提价 $q\%$；

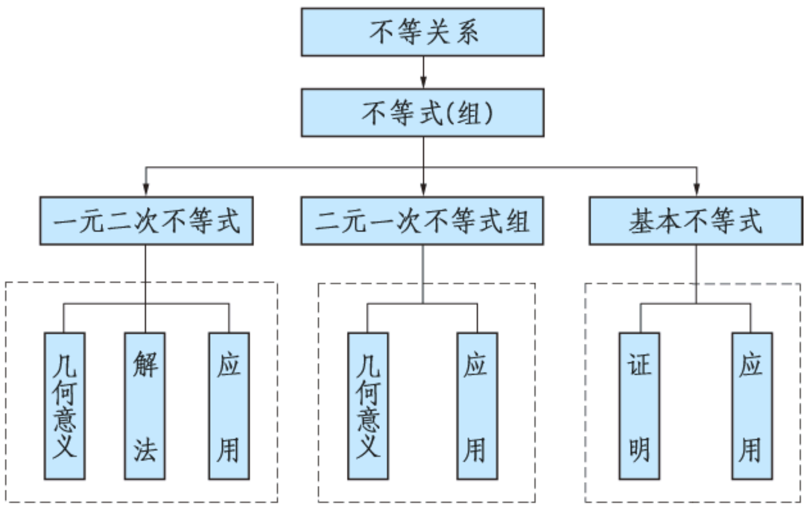
方案乙：第一次提价 $q\%$，第二次提价 $p\%$；

方案丙：第一次提价$\dfrac{p+q}{2}\%$，第二次提价$\dfrac{p+q}{2}\%$.

其中 $p>q>0$，比较上述三种方案，哪一种提价少？哪一种提价多？

本章回顾

本章研究了一元二次不等式的解法，并借助二元一次不等式（组）的几何意义求解简单的线性规划问题，最后探索了基本不等式的证明过程，例举了基本不等式的简单应用.



不等式是刻画现实世界中不等关系的数学工具，它是描述优化问题的一种数学模型.

学习本章应注重数形结合，学会通过函数图象理解一元二次不等式与一元二次方程、二次函数的联系，并能解释二元一次不等式和基本不等式的几何意义. 在此基础上，体会不等式在解决实际问题中的作用，进一步提高解决实际问题的能力.

复习题

感受·理解

1. 解下列不等式:

(1) $2x^2+5x-3>0$; (2) $2+x-x^2\leqslant 0$;

(3) $x^4-x^2-2\geqslant 0$; (4) $2x-\sqrt{x}>1$.

2. 求不等式 $x^2-x-12\leqslant 0$ 的整数解.

3. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-4>0\}$, $B=\{x \mid 2x^2+x-6>0\}$,求 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$, $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$.

4. 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x \mid x<1$ 或 $x>3\}$,求 $a:b:c$.

5. 不等式 $x+ay+3>0$ 表示直线 $x+ay+3=0$ (　　).

A. 上方的平面区域　　B. 下方的平面区域

C. 右方的平面区域　　D. 左方的平面区域

6. 画出下列二元一次不等式组所表示的平面区域:

(1) $\begin{cases} x+2y\leqslant 12, \\ 3x-y\geqslant -6, \\ x\leqslant 8, \\ y\geqslant -1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y\leqslant 24, \\ 3x+2y\leqslant 36, \\ 0\leqslant x\leqslant 10, \\ 0\leqslant y\leqslant 11. \end{cases}$

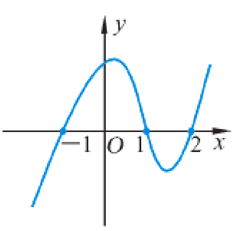
7. 求 $z=2x+y$ 的最大值和最小值,其中 x, y 满足约束条件

$$\begin{cases} x-4y\leqslant -3, \\ 3x+5y\leqslant 25, \\ x\geqslant 1. \end{cases}$$

8. 求函数 $y=2-3x-\dfrac{4}{x}$ $(x>0)$ 的最大值.

9. 求半圆上一点到直径两端点距离之和的最大值.

思考·运用



(第 10 题)

10. 函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图所示.

(1) 方程 $f(x)=0$ 的解集是________;

(2) 不等式 $f(x)<0$ 的解集是________;

(3) 不等式 $f(x)>0$ 的解集是________.

11. 设 $f(x)=(m+1)x^2-mx+m-1$.

(1) 若方程 $f(x)=0$ 有实根,则实数 m 的取值范围是________;

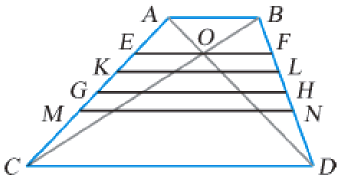
(2) 若不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $\varnothing$,则实数 m 的取值范围是________;

(3) 若不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,则实数 m 的取值范围是________.

12. 某工厂要制造Ⅰ型高科技装置 45 台、Ⅱ型高科技装置 55 台,需用薄合金钢板给每台装置配一个外壳. 已知薄板的面积仅有两种规格:甲种薄板每张面积 2 m^2,可做Ⅰ型外壳 3 个和Ⅱ型外壳 5 个;乙种薄板每张面积 3 m^2,可做Ⅰ型、Ⅱ型外壳各 6 个. 求两种薄板各有多少张,才能使总的用料面积最小.

探究·拓展

13. 已知正数 x, y 满足 $x+2y=1$,求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值.



（第 14 题）

14. 如图，$ABDC$ 为梯形，其中 $AB=a$，$CD=b$，设 O 为对角线的交点. 若 GH 表示平行于两底且与它们等距离的线段（即梯形的中位线），KL 表示平行于两底且使梯形 $ABLK$ 与梯形 $KLDC$ 相似的线段，EF 表示平行于两底且过点 O 的线段，MN 表示平行于两底且将梯形 $ABDC$ 分为面积相等的两个梯形的线段.

试研究线段 GH，KL，EF，MN 与代数式 $\dfrac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$，$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 之间的关系，并据此得到它们之间的一个大小关系. 你能用基本不等式证明所得的结论吗？

计算器使用范例

◆ 范例 1：小数位数/有效位数

(1)　200 ÷ 7 × 14 ＝ 400

200 [÷] 7 [×] 14 　[=] 　[400]

（指定3位小数）[MODE] [MODE] [MODE] [1] [3]

[400.000]

(2)　2 ÷ 7，以 3 位有效位数（SCI3）显示计算结果.

[MODE] [MODE] [MODE] [2] [3]

2 [÷] 7 　[=] 　[2.86^{-01}]

注：若要恢复请按 [MODE] [MODE] [MODE] [3] [1]

◆ 范例 2：利用变数进行计算

已知方程　$3.2x^2-9.2x+4.7=0$，**试根据公式**

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

求解方程.

3.2 [SHIFT] [STO] [A] [(−)] 9.2 [STO] [SHIFT] [B]

4.7 [SHIFT] [STO] [C] [AC] [ALPHA]

[B] [X^2] [−] 4 [ALPHA] [A] [ALPHA]

[C] [SHIFT] [STO] [D] [AC] [(] [(−)] [ALPHA]

[B] [+] [√] [ALPHA] [D] [)] [÷]

[(] [2] [ALPHA] [A] [)]

[=] 　[2.210582305]

按 [◀] 键直到 [B] 与 [√] 之间，即 [+] 下方，改为 [−]

[=] 　[0.664417695]

◆ 范例 3：统计计算

考察某学校学生上课迟到的情况，该学校 2 308 **个学生半年上课迟到次数列表如下，求总体平均数、方差.**

迟到次数	0	1	2	3	4	5
人　数	557	503	483	375	232	158

解：按 [MODE] [2] （进入统计状态）

[SHIFT] [CLR] [1] （Scl）（消除存储器内容）

[AC] 0 [SHIFT] [;] 557 [DT] 1 [SHIFT] [;] 503 [DT]

2 [SHIFT] [;] 483 [DT] 3 [SHIFT] [;] 375 [DT]

4 [SHIFT] [;] 232 [DT] 5 [SHIFT] [;] 158 [DT]

[SHIFT] [S-VAR] [1] （$\bar{x}$） [=] 　[$\bar{x}$ 1.868284229]

[SHIFT] [S-VAR] [2] （Xσn） [=] 　[Xσn 1.531862405]

[X^2] [=] 　[Ans^2 2.346602429]

说　　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据2003年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设恰当的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法三条主线,通过问题将全书贯通.每个模块围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最佳发展.

众多的数学家、心理学家、学科教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写工作.参与本册讨论与审稿的专家与教师有:葛军、石志群、仇炳生、寇恒清、于明、孙旭东、张松年、卫刚、王红兵、祈建新、冯惠愚、周敏泽、丁世明等,在此向他们深表感谢!

本书编写组

2005年4月

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

本册主编　徐稼红

编写人员　徐稼红　董林伟　陆云泉　樊亚东　陈跃辉　李善良

参与设计　尤建功　夏建国　张乃达　陈光立

责任编辑　蔡　立